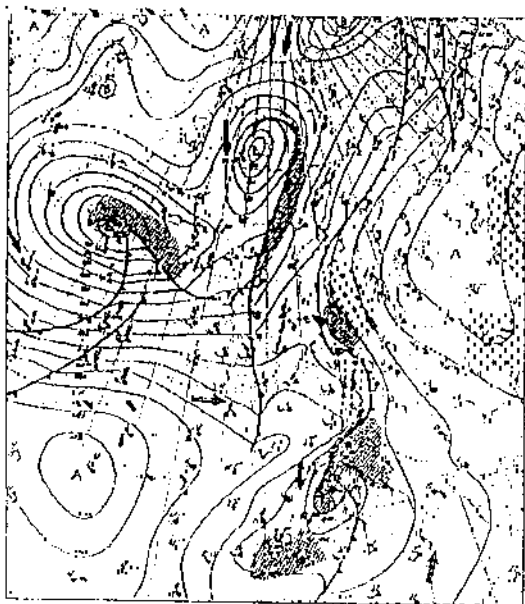


UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
" LA SAPIENZA "

Dipartimento di Fisica



DISPENSE DI METEOROLOGIA
Prof. S. PALMIERI



Servizio Fotostampa Dispense

NOVEMBRE 1998

124 / 18,200

S. PALMIERI

INDICE

1 - Nascita e sviluppo della meteorologia

- 1.1 - Meteorologia nell'antichità
- 1.2 - La meteorologia come scienza : prime metodologie
- 1.3 - Elaboratori elettronici di grandi prestazioni e modelli di atmosfera
- 1.4 - L'osservazione dell'atmosfera dallo spazio : i satelliti meteorologici
- 1.5 - Lo studio del clima : fluttuazioni climatiche

2 - L'atmosfera e la sua descrizione matematica. Equazioni fondamentali della meteorologia

- 2.1 - L'atmosfera
- 2.2 - Equazioni fondamentali della meteorologia
- 2.3 - Differenziazione totale : formulazione lagrangiana ed euleriana
 - 2.3.1 - *Analisi di scala*
 - 2.3.2 - *Vento geostrofico*
 - 2.3.3 - *Vento di gradiente*
- 2.4 - Chiusura del sistema 2.20) : Principi di conservazione della massa e del calore
 - 2.4.1 - *Principio di conservazione della massa*
 - 2.4.2 - *Principio di conservazione del calore*

3 - Approssimazione quasi - statica

4 - Approssimazione quasi - geostrofica

- 4.1 - Introduzione
- 4.2 - Vorticità e circolazione
- 4.3 - Equazione della vorticità
- 4.4 - Sistema di equazioni quasi - geostrofico
 - 4.4.1 - *Equazione delle tendenze*
 - 4.4.2 - *Equazione delle omega*

Errata corrige

Nel capitolo 4 le numerazioni dei paragrafi vanno corrette nel modo seguente :

4.4 - Sistema di equazioni quasi geostrofico

4.4.1 - Equazione delle tendenze

4.4.2 - Equazione delle omega

1 - Nascita e sviluppo della meteorologia

1.1 Meteorologia nell'antichità

Il termine meteorologia deriva dal greco meteora, che sta a significare fenomeni elevati ossia che avvengono al di sopra della superficie terrestre.

Il primo lavoro significativo inerente la meteorologia fu un trattato di Aristotele sulla meteorologia dell'atmosfera, mentre dal punto di vista previsionistico il primato spetta a Teofrasto di Ereso.

Aristotele, nato a Stagira (Macedonia) nel 384 A.C. e morto a Calcide nel 322 A.C., oltre che uno dei più illustri filosofi dell'antichità fu anche un grande scienziato.

Fece parte dell'Accademia di Platone alla cui dottrina in parte aderì, ed anche se nello studio della fisica egli non fu originale come nel settore della filosofia, ebbe però il merito di porre l'osservazione alla base delle proprie considerazioni.

Nel 335 A.C. Aristotele fondò ad Atene una sua scuola, "Il Liceo" che, per l'abitudine dei suoi componenti di passeggiare mentre dibattevano i vari argomenti, fu chiamata "peripatetica".

Il trattato intitolato "Meteorologia" appartiene a questo periodo. In considerazione della importanza storica di questa opera si ritiene utile fornire una breve descrizione delle parti principali del contenuto:

-Libro Primo : Oggetto ed estensione della Meteorologia. Principi generali. Le comete.

Sulla formazione delle nubi e della nebbia. Su la rugiada ed il gelo. Su pioggia, neve e grandine e loro relazione col gelo. Grandine. Venti.

-Libro Secondo : Mare e salinità. Venti e piovosità.

Classificazione dei venti. Influenza del sole sui venti.

-Libro Terzo : Temporali, turbini di vento, uragani, arcobaleni.

-Libro Quarto : Teoria dei quattro elementi e della trasformazione della materia.

Teofrasto di Ereso (372-278 A.C.), successore di Aristotele nella direzione della scuola "peripatetica", fu autore di molte opere originali nel settore della meteorologia, in particolare egli scrisse "Sui segni del tempo" e "Sui venti".

Nella prima opera si trovano elencate molte osservazioni e regole empiriche riguardanti la pioggia, il vento e le perturbazioni, il bel tempo e la previsione a lunga scadenza : ecco qualche esempio: "Ad un inverno piovoso segue una primavera secca, ad un inverno secco una primavera piovosa" ; "Ad una stagione nevosa segue un raccolto abbondante".

Nel trattato intitolato "Sui venti", Teofrasto descrive i movimenti dell'aria e vari fenomeni associati, come ad esempio il movimento delle nubi e la condensazione del vapore quando l'aria è forzata a salire lungo il fianco di una montagna.

A conferma che la previsione del tempo è stata un'aspirazione ed un bisogno dell'uomo fin dalle età più remote, si riporta il seguente passo del Vangelo di S. Luca (Cap XII,54):

"... all'ocaso una nuvola voi subito dite: vuol fare temporale! E così succede ..."

Ciò significa che fin da allora tramite l'osservazione del quotidiano verificarsi di determinati fenomeni (per es. piogge) in relazione a certe cause (per es. comparsa delle nubi ad occidente) c'era già, nella gente il desiderio di prevedere i diversi fenomeni meteorologici. In realtà non è che questi popoli già sapessero il perché della comparsa delle nubi ad occidente (movimento delle perturbazioni e delle nubi da Ovest verso Est), piuttosto dalla frase del Vangelo emerge la saggezza popolare derivante da una attenta osservazione del quotidiano, che ancora oggi rispecchia fedelmente il verificarsi ed il susseguirsi di certe alternanze meteorologiche.

1.2 La meteorologia come scienza: prime metodologie

Lo sviluppo sistematico della meteorologia si è avuto solo nel corso dell'ultimo secolo, agendo come elemento propulsore la necessità di prevedere il tempo, in particolare i fenomeni intensi. Vediamo quali sono state le tappe principali di questo cammino.

Primo periodo 1860-1920

Un uragano di estrema violenza investiva il 14 novembre 1854 la flotta francese e quella inglese nel Mar Nero causando gravi danni e la perdita della nave Henry IV.

Urbain Jean Joseph Le Verrier, direttore dell'Osservatorio Astronomico di Parigi eseguì, per invito del ministro della guerra maresciallo Vaillant, uno studio accurato di questo evento, concludendo che sarebbe stato possibile segnalare in tempo l'arrivo ai porti del Mar Nero se avesse funzionato un servizio meteorologico; poco tempo dopo la proposta fu accolta e rapidamente attuata dal governo. Nasceva così il Servizio Meteorologico Francese.

In Italia un appassionato studioso e promotore di iniziative meteorologiche fu Padre Sacchi.

Sotto il suo patrocinio fu attuato un piano molto limitato di organizzazione meteorologica, comprendendo le stazioni di Bologna, Ferrara, Urbino ed Ancona.

Il 20 giugno 1855 venne istituita la corrispondenza sistematica telegrafica delle osservazioni meteorologiche.

Un ufficio centrale meteorologico fu istituito presso il museo di Fisica e Scienze Naturali a Firenze il 1 aprile 1866.

Nel maggio 1879 veniva istituito il Regio Ufficio Centrale di Meteorologia nell'antico convento del Collegio Romano.

In questo periodo si procede soprattutto attraverso metodi empirici per ottenere un'analisi quantitativa.

Schema del Primo Periodo

L'invenzione del telegrafo permise di comunicare velocemente i dati raccolti in superficie dai vari punti di osservazione permettendo di tracciare le prime carte sinottiche del tempo, sulle quali venivano riportate le misurazioni effettuate simultaneamente (l'aggettivo "sinottico" sta appunto per "sincrono", ossia allo stesso tempo). Queste carte permisero di fare una prima previsione sui centri di pressione passando attraverso tre stadi intermedi.

Classificazione delle configurazioni bariche

Con l'ausilio dei dati riportati sulle carte, tramite interpolazione si tracciavano linee unenti punti di ugual pressione (isobare). Venivano così a visualizzarsi determinate configurazioni di pressione (aree di alta e bassa pressione).

Movimento precedente

Attraverso mappe precedenti l'ultima stilata, si aveva un'idea del movimento delle configurazioni, precedente al momento della previsione.

Regole empiriche

Tramite lo studio del movimento precedente, con l'ausilio di regole empiriche, era possibile delineare l'evoluzione dei campi individuando la possibile posizione futura delle configurazioni di pressione. In questo modo fu possibile effettuare le prime previsioni meteorologiche.

Secondo Periodo : 1920 - 1950

Si assiste ad un consolidamento della teoria e ad un'applicazione dei primi metodi basati su concetti fisici.

Intorno al 1920 nel nostro paese veniva impiegato uno strumento (l'analizzatore di Vercelli) che permetteva l'analisi di Fourier delle serie temporali della pressione atmosferica nonché la estrapolazione e la previsione del campo barico. Le scoperte principali di questo periodo sono prevalentemente dovute alla scuola norvegese di Bergen, in particolare al gruppo di scienziati capeggiati dal Bjerknes che, studiando il campo termico sulle carte sinottiche, rilevarono variazioni repentine di temperatura che individuavano superfici di discontinuità termica nell'atmosfera. Queste superfici furono nominate "fronti" : la scuola di Bergen formulò una teoria secondo la quale i cicloni possono interpretarsi come fenomeni derivanti da onde generate su tali superfici di discontinuità.

Dall'analisi frontale (inclinazione dei fronti, fenomeni di occlusione, fase matura nella evoluzione ciclonica, nubi e precipitazioni associate) si ha il primo modello fisico tridimensionale di zona perturbata da cui deriva un nuovo metodo di analisi e previsione.

Si può osservare come, rispetto al primo periodo, caratterizzato soprattutto da osservazioni ed analisi empiriche, nel successivo si sviluppa la teoria su basi più fisiche (ad esempio, applicazione delle teorie ondose dei fronti, studio dei fenomeni inerenti alla termodinamica dell'atmosfera), sia pure con applicazioni esclusivamente qualitative.

Terzo Periodo : dal 1950 ad oggi

Con l'avvento della prima radiosonda (minuscolo sistema agganciato ad un pallone libero, costituito da sensori per le misure meteorologiche e da una piccola trasmittente per l'invio dei dati a terra) e del primo modello di telescrivente si ebbe un ulteriore sviluppo dell'analisi atmosferica.

La radiosonda permise la raccolta dei primi dati in quota di vento, temperatura, pressione, umidità, densità, dando un notevole impulso all'analisi verticale dell'atmosfera.

A sua volta la telescrivente consentì ad ogni stazione meteorologica di ricevere ed inviare in tempo reale i bollettini meteorologici, rendendo possibile una visione d'insieme e dettagliata degli eventi atmosferici.

Accanto alle innovazioni tecnologiche, una notevole spinta alla analisi quantitativa dei campi di pressione e temperatura in quota fu data dal principio di conservazione della vorticità assoluta che segnò un altro passo avanti nella teoria. Arrivando ai giorni nostri lo sviluppo è stimolato dalla disponibilità di super calcolatori elettronici per la elaborazione rapida dei modelli di atmosfera, e di satelliti meteorologici omogenei sull'intero globo terrestre. Si è inoltre consolidata l'aspirazione dell'umanità a comprendere i fenomeni del clima (proprietà statistiche dell'atmosfera su lunghi periodi) e delle sue fluttuazioni.

Su questi tre argomenti si ritiene utile dare nel seguito qualche ulteriore informazione introduttiva.

1.3 Elaboratori elettronici di grandi prestazioni e modelli di atmosfera

La capacità di queste macchine di poter gestire linee di dati ad alta velocità ha reso possibile la raccolta centralizzata, in pochissimo tempo, di una mole gigantesca di osservazioni meteorologiche provenienti dall'intero globo e relative ad un'ora determinata. Ciò ha consentito di descrivere lo "stato iniziale" dell'atmosfera in maniera obiettiva e di memorizzarlo nella macchina per i calcoli successivi.

Attraverso programmi di elaborazione detti di "analisi automatica", vengono identificati tipo e origine degli innumerevoli messaggi meteorologici che circolano secondo cadenze e formati convenuti internazionalmente su una rete mondiale di telecomunicazioni per la meteorologia. I messaggi vengono decodificati dall'elaboratore, i dati sono convertiti in forma standard e ne viene verificata la coerenza con le altre informazioni disponibili sia nello spazio che nel tempo.

Dopo questa prima fase l'elaboratore deriva attraverso procedimenti obiettivi d'interpolazione e di perequazione le distribuzioni continue di vari elementi (velocità del vento, pressione, temperatura, umidità, etc.), presentando su appropriate unità di uscita i campi in forma grafica. Una volta che si disponga di uno stato iniziale dell'atmosfera ad un tempo determinato si tratta di compiere il passo più ambizioso : integrare numericamente un sistema di equazioni che esprimano in forma matematica le leggi fisiche che regolano il comportamento di un gas come l'aria. Occorre tener presente a questo proposito che si dispone di una valida piattaforma teorica per la descrizione del movimento di un fluido in generale ed in particolare. La teoria si basa sui principi classici della conservazione dell'energia, della quantità di moto e della massa. In particolare se è nota la distribuzione delle sorgenti di calore, l'espressione matematica dei principi menzionati fornisce un sistema completo delle sei incognite temperatura, pressione, campo di velocità e densità.

La forma di queste equazioni è tale che la loro soluzione può essere determinata nel futuro sotto certe condizioni e per intervalli di tempo successivi, a partire dalla distribuzione di partenza delle incognite considerate in tutti i punti dello spazio.

Una prima difficoltà nella quale ci si imbatte nell'affrontare questo problema è inerente alla fisica del sistema atmosferico.

L'esperienza ci insegna che l'atmosfera in movimento si trova sempre molto vicina ad uno stato di equilibrio dinamico: in termini più precisi, la forza orizzontale di pressione che agisce sulla particella elementare è quasi esattamente in equilibrio con la forza di Coriolis (una forza apparente dovuta alla rotazione terrestre e pari a $F_c = -2\Omega \wedge V$ essendo Ω la velocità angolare della terra e V la velocità relativa della particella), mentre la forza verticale di galleggiamento è quasi equilibrata dalla cosiddetta forza gravitazionale virtuale (la risultante della forza centrifuga e della gravità pura). Da una situazione di questo tipo risulta che le accelerazioni (cioè le derivate temporali della velocità) sono piccole differenze tra termini individualmente grandi. Un errore dell'1% nella valutazione di questi termini dà luogo ad un errore del 10% nelle valutazioni dell'accelerazione.

Vi sono poi ostacoli di carattere squisitamente matematico.

In particolare la difficoltà è quella della soluzione di un problema di contorno e valore iniziale per un sistema simultaneo di sei equazioni alle derivate parziali, non lineari, in un dominio tridimensionale. Poiché non si dispone di metodi generali analitici per ottenere la soluzione, si deve ricorrere all'integrazione numerica, riducendo le equazioni differenziali in equazioni incrementali. Quando si procede all'integrazione numerica, la diminuzione degli incrementi finiti di spazio e di tempo non garantisce che la soluzione dell'equazione alle differenze coincida con quella dell'equazione differenziale corrispondente. Affinché questo si verifichi è necessario che l'incremento di tempo per il quale si effettua la previsione elementare sia inferiore al tempo necessario per un'onda o impulso ad attraversare la distanza tra due punti contigui della griglia nello spazio (criterio di Courant-Friedrich-Lewy). Ne deriva che quando si opera con le equazioni generali dell'idrodinamica, che descrivono anche il comportamento di onde molto veloci come quelle acustiche e di gravità, se si sceglie una griglia con punti spaziali di 150 Km l'integrazione temporale deve essere effettuata per passi di circa dieci minuti e per giungere ad una previsione di 24 ore si richiedono ben 144 successive piccole previsioni di 10 minuti ciascuna. Tenendo presente che ogni calcolo va poi iterato per ogni punto dello spazio (per una rappresentazione emisferica delle grandezze meteorologiche sono necessari 10^5 punti), ci si può formare un'idea della mole di calcoli necessaria.

Al fenomeno appena descritto dell' "instabilità lineare" si aggiunge quello della "instabilità non lineare" che può comparire durante l'integrazione numerica nella forma di un improvviso aumento di energia nelle piccole lunghezze d'onda.

Anche questa difficoltà è stata recentemente superata utilizzando particolari schemi alle differenze finite per il calcolo dei termini non lineari (sono i termini del tipo $u \frac{\partial u}{\partial x}$) nelle equazioni del moto. Una volta superate le difficoltà generali di carattere fisico - matematico, il successo della simulazione numerica della circolazione generale dell'atmosfera riposa su una valida schematizzazione degli effetti non adiabatici.

Ovviamente non sarebbe estremamente significativo condurre una sperimentazione con le equazioni prive dei fattori non adiabatici poiché è proprio il riscaldamento differenziato dell'atmosfera la causa più importante che pilota tutti i movimenti dell'aria. I processi di riscaldamento dei quali si dovrà tener conto sono essenzialmente tre:

- trasferimento radiativo;
- rilascio di calore latente determinato dalla condensazione del vapor d'acqua per effetto di moti verticali a scale diverse;
- trasporto turbolento di calore sensibile (interazione oceani-atmosfera).

1.4 L'osservazione dell'atmosfera dallo spazio: i satelliti meteorologici

Lo straordinario progresso delle tecniche di rilevamento della radiazione elettromagnetica, specialmente nell'infrarosso e nelle microonde, sta rendendo sempre più competitivi i mezzi di osservazione meteorologica dallo spazio rispetto ai mezzi convenzionali. In particolare mentre da un lato si cerca di sostituire le attuali reti terrestri di osservazione con sistemi di satelliti ad orbita polare (per esplorare tutta la superficie terrestre) e geostazionaria (per sorvegliare con continuità determinate parti della superficie terrestre); dall'altro si cerca di ottenere nuove misure realizzabili soltanto dallo spazio.

La ripresa di immagini costituisce la missione più tradizionale per un satellite meteorologico; gli attuali radiometri permettono di ottenere dai satelliti polari immagini con una risoluzione di circa un chilometro nella banda del visibile ed in quella infrarossa e di circa venticinque chilometri nel campo delle microonde. L'impiego più immediato delle immagini è costituito dall'identificazione delle proprietà delle masse d'aria con l'analisi dei sistemi nuvolosi, individuati mediante la loro riflettività (nel visibile), la temperatura (nell'infrarosso) e le dimensioni delle gocce d'acqua (nelle microonde, che quindi mettono in evidenza le aree di precipitazione).

Ci si sforza poi di estrarre parametri meteorologici quantitativi attraverso l'analisi numerica delle immagini effettuata mediante elaboratori elettronici. I prodotti di questa analisi possono essere le temperature della superficie terrestre (specialmente quella del mare, da cui dipende il flusso di calore e vapore acqueo dalla superficie terrestre nell'atmosfera), la copertura nuvolosa, il riconoscimento automatico di tipi di superficie ed il bilancio radiativo della superficie terrestre. Particolare importanza assume l'impiego delle immagini quando queste sono disponibili molto frequentemente (per es. ogni mezz'ora) su di una stessa area (come dai satelliti geostazionari, capaci oggi giorno di risoluzioni di un chilometro nel visibile e di otto chilometri nell'infrarosso). L'animazione cinematografica di tali immagini permette di sorvegliare i fenomeni ciclogenetici e lo sviluppo dei fenomeni convettivi.

Inoltre, mediante tecniche di correlazione applicate con mezzi elettronici e ottici, è possibile misurare gli spostamenti delle nubi, dai quali può essere dedotto il vento, elemento di primaria importanza nella previsione del tempo effettuata con modelli numerici.

Oltre alle immagini che vengono riprese in bande della radiazione elettromagnetica nelle quali l'atmosfera è trasparente ("finestre"), i satelliti meteorologici riescono a fornire informazioni sulla struttura tridimensionale dell'atmosfera stessa utilizzando bande di assorbimento. Nelle bande di intenso assorbimento atmosferico la radiazione emessa dal suolo e dagli strati più bassi dell'atmosfera viene schermata ed il satellite osserva soltanto la radiazione emessa dagli strati più alti (radiazione che dipende sia dalla temperatura sia dal contenuto di gas assorbente). Via via che la banda scelta presenta assorbimento meno intenso, l'informazione deriverà da strati sempre più bassi finché, in finestra, l'informazione giungerà dalla superficie terrestre. In questo modo misurando la radiazione in diverse bande di assorbimento si effettua una specie di "stratigrafia" dell'atmosfera. Se si opera in bande in cui il gas assorbente ha composizione nota e stabile (anidride carbonica nell'infrarosso, ossigeno nelle microonde), si ottiene la distribuzione

verticale di tali gas nell'atmosfera. Tali misure, che sono di gran lunga le più importanti per la previsione del tempo, almeno alle medie latitudini, vengono attualmente effettuate dai satelliti polari e le precisioni ottenibili si avvicinano sempre più a quelle dei sondaggi convenzionali con pallone (1-2 gradi centigradi di scarto quadratico medio), tenendo ben presente oltre tutto che il numero di sondaggi da satellite può essere fino a cinque volte maggiore di quello delle stazioni di radiosondaggio (circa ottocento) e distribuito omogeneamente su tutta la superficie terrestre.

Come si vede i satelliti stanno gradualmente risolvendo molti dei problemi dai quali siamo partiti, soprattutto grazie al progredire della tecnologia dei sensori e dei sistemi spaziali e dei metodi di elaborazione dei dati.

1.5 Lo studio del clima : fluttuazioni climatiche

Dall'esame di parecchi elementi diversi, diretti ed indiretti, si è potuto fornire un quadro indicativo di quello che è stato il clima della Terra negli ultimi decenni, nei secoli, nei millenni e nelle epoche geologiche. Durante gli ultimi due milioni di anni vi sono state alternanze tra periodi di clima glaciale ed intervalli meno freddi (interglaciali) con cadenza delle epoche glaciali di circa centomila anni. Sulla base di questi elementi risulta che il clima è soggetto a variazioni che hanno scale temporali diverse, evidenziando inoltre che la tendenza evolutiva del clima a lungo termine è completamente mascherata da fluttuazioni di periodo relativamente breve risultando quindi impercettibile.

Quali sono le cause fisiche delle fluttuazioni climatiche ?

Una prima ipotesi è che esse possano prodursi nell'ambito dello stesso sistema climatico senza l'intervento di fattori esterni. Esistono infatti molti meccanismi che possono dar luogo ad una variabilità interna del sistema. Ciò deriva dalle interazioni di carattere non lineare (denominate di "feedback") che si verificano tra le varie parti del complesso, le quali presentano tempi di reazione molto diversi.

Un tipico meccanismo di questo genere, che lega insieme il manto nevoso, la riflessione dell'energia radiante del Sole e la temperatura dell'aria, potrebbe essere il seguente : si supponga che si verifichi una piccola diminuzione della temperatura, tale da favorire l'estensione del manto nevoso sulla Terra, l'aumentata riflessione di radiazione solare da parte del manto nevoso ridurrebbe ulteriormente la temperatura ostacolando così ancor più il riscaldamento della superficie terrestre da parte del Sole.

Altri influssi sul clima potrebbero derivare da variazioni della quantità di materiale particolato nell'alta atmosfera dovuto all'attività vulcanica, o ad incremento nel contenuto di anidride carbonica nell'aria come risultato di incendi di combustibile fossile. Un esempio dei possibili effetti che le eruzioni vulcaniche potrebbero avere sulle fluttuazioni climatiche si ebbe nel 1816, l'anno seguente all'eruzione del vulcano Tambora nell'arcipelago indonesiano. L'estate di quell'anno è ricordata come la più fredda registrata nei duecento anni precedenti, in varie zone dell'Europa occidentale, in Inghilterra e negli Stati Uniti.

La causa di quest'anomalia pare risieda proprio nell'enorme quantità di polveri riversate nell'alta atmosfera dall'eruzione vulcanica, aumentando notevolmente la riflettività dell'atmosfera nei confronti della radiazione solare incidente. A tal proposito va ricordato che di recente due ricercatori dell'NCAR di Boulder in Colorado hanno osservato come le variazioni nella quantità di materiale particolato nell'alta atmosfera siano un indicatore migliore rispetto al numero di macchie solari per determinare le fluttuazioni di temperatura.

Un altro interrogativo che affascina l'uomo della strada è il seguente:

Possono le attività dell'uomo sulla Terra essere la causa di variazioni attuali o future del clima ?

Che il clima subisca l'effetto delle zone urbane è, per esempio, una realtà dimostrata: "l'isola di calore" in corrispondenza delle città è un fatto ben documentato che interessa aree dell'ordine dei mille chilometri quadrati. Queste influenze però sono a carattere squisitamente locale e si presume non abbiano rilevanza sul clima generale della Terra. Il problema invece è un altro: l'aumento nell'uso di combustibili fossili, dalla fine del secolo scorso ai nostri giorni, ha determinato un aumento dell'anidride carbonica (CO_2) atmosferica nella misura del 10% ed è tale che se nel corso di uno o due secoli tutte le riserve disponibili di combustibile venissero consumate, la concentrazione di CO_2 in atmosfera aumenterebbe in maniera notevole. Si presume che questo potrebbe dar luogo ad un aumento significativo della temperatura della Terra con conseguenze apprezzabili sugli altri elementi del clima.

Ulteriori effetti dell'attività umana sul clima sono rappresentati dall'aumentato uso di CFC (cloro - fluoro - carboni) che sono i principali responsabili dell'assottigliamento dello strato di ozono stratosferico che ci protegge dalla radiazione solare ultravioletta. Allo stato attuale delle conoscenze, comunque, tutte queste considerazioni stanno attendendo la prova dei fatti, visto che fino ad oggi non si sono manifestate sostanziali variazioni climatiche se non a scala locale (dimensioni di una città).

E' possibile azzardare qualche previsione circa l'evoluzione futura del clima terrestre?

Sebbene negli ultimi anni si siano fatti molti progressi verso lo sviluppo di una teoria quantitativa del clima, sia attraverso studi sperimentali e di osservazione, sia attraverso modelli matematici, la scienza non è ancora in grado di dare una risposta affidabile. Qualche indicazione può essere dedotta con metodi statistici tenendo conto delle possibili implicazioni future dell'attività umana. Le fluttuazioni del clima nel passato sembrano suggerire che il riscaldamento interglaciale degli ultimi ottomila anni dovrebbe essere sostituito da un regime di raffreddamento. L'avvio di questa svolta potrebbe essere ancora lontano qualche centinaio di anni, oppure addirittura già in corso: la gradualità del fenomeno sarebbe tale da rendere la variazione impercettibile per periodi dell'ordine di anni. Va tenuto presente in ogni caso che la precedente affermazione potrebbe risultare non valida se, com'è stato già ricordato dovesse prevalere, unitamente ad altri effetti, l'incremento di anidride carbonica nell'atmosfera. Se questa seconda ipotesi si avverasse, si avrebbero notevoli riduzioni dei ghiacci sulle regioni artiche, con importanti conseguenze per il clima di tutto il globo.

In conclusione sembra necessario fare ogni sforzo per progredire nella schematizzazione e nella rappresentazione di tutti i fattori e di tutti i possibili meccanismi di interazione tra le varie parti del sistema, con particolare riferimento agli scambi atmosfera - oceano. Questi studi vanno integrati con misure a scala mondiale di parecchi elementi, tra cui:

- Radiazione solare (soprattutto nel visibile e nell'ultravioletto)
- Contenuto medio di CO_2 , ossidi di azoto, aerosol troposferici ecc.
- Potere riflettente della superficie terrestre, specie della neve e del ghiaccio.

Con queste misure sarà possibile confortare le ipotesi e gli schemi teorici con dati sperimentali osservati.

2 - L'atmosfera e la sua descrizione matematica - Equazioni fondamentali della meteorologia

2.1 L'atmosfera

Prima di addentrarci nella matematica del problema introduciamo per un momento l'oggetto del nostro studio. L'atmosfera è un involucro gassoso che circonda la Terra, è soggetto alla sua forza di gravità e la segue nei suoi movimenti di rotazione e rivoluzione. Data la premessa sorge spontanea la domanda:

Come mai per effetto della gravità l'atmosfera non è tutta schiacciata sulla superficie terrestre?

La risposta risiede nella natura gassosa dell'atmosfera. I gas infatti, per natura, tendono ad occupare tutto lo spazio a loro disposizione esercitando in ogni punto di esso la medesima pressione. Ogni squilibrio di pressione che viene a crearsi genera immediatamente una forza diretta dalla pressione maggiore a quella minore tendente a ristabilire l'equilibrio originario. Ciò ci fornisce lo strumento per rispondere alla domanda che ci siamo posti; a causa della gravità infatti l'atmosfera è disposta non uniformemente attorno alla superficie terrestre ma con densità, e ovviamente pressione, decrescenti dal basso verso l'alto. Esiste quindi una differenza di pressione tra la base e la sommità dell'atmosfera che genera una forza uguale e contraria alla gravità facendo sì che questa eviti di far collassare l'atmosfera in uno straterello adiacente alla superficie terrestre.

In assenza di altre forze l'atmosfera rimarrebbe in equilibrio, ossia in condizioni *barotropiche*, risultando praticamente statica. In realtà il differente riscaldamento della superficie terrestre, provoca gradienti orizzontali di temperatura e di conseguenza le superfici di ugual pressione e di ugual densità tenderanno ad inclinarsi mutuamente generando le cosiddette condizioni *barocline*.

Relativamente alla composizione chimica l'atmosfera risulta composta da Azoto (78%), Ossigeno (21%), e per l' 1% da altri gas, tra i quali l'anidride carbonica, l'insieme di questi gas definisce i componenti principali dell'atmosfera, che però non hanno alcuna rilevanza a livello di "tempo" meteorologico. Meteorologicamente parlando infatti, un ruolo fondamentale è rivestito dai componenti variabili e precisamente :

- **Vapor d'acqua** : Presente nei primi Km di altezza, prodotto per evaporazione da superfici liquide. E' fondamentale in quanto nei cambiamenti di stato immagazzina e rilascia calore, rappresentando quindi una fonte di energia, che nei casi più intensi può dar luogo a fenomeni come temporali e cicloni. Inoltre per la sua capacità di assorbimento della radiazione infrarossa trattiene il calore emesso dalla superficie terrestre; è per questo che dopo una notte con cielo nuvoloso si hanno temperature maggiori rispetto ad una notte di cielo limpido.

- **Pulviscolo atmosferico** : Anch'esso presente essenzialmente nei bassi strati, viene prodotto per erosione della superficie terrestre, anche se la percentuale maggiore di esso è dovuta al sale che si libera dalla superficie marina in seguito ad onde e spruzzi. E' importante perché svolge il ruolo di nucleo di aggregazione del vapore durante il processo di formazione delle nubi e delle nebbie.

- **Ozono** : Si trova tra i 25 ed i 70 Km di altezza in piccolissime percentuali. Ciò nondimeno riveste un' importanza enorme in quanto fa da scudo alla radiazione ultravioletta, dannosa all'uomo e alle piante. Si forma fotochimicamente per scomposizione di ossigeno molecolare, dovuta all'assorbimento di radiazione UV., e ricomposizione di ogni atomo libero con un'altra molecola di ossigeno. Ha un tempo di vita molto breve in quanto, sempre a causa della radiazione U.V., si ridecompona in ossigeno molecolare più un ossigeno monoatomico, e quindi la sua esistenza è legato al bilancio tra produzione e distruzione delle proprie molecole.

La quantità di ozono è variabile con la latitudine e nel corso dell'anno, ma è accertato che nuclei di massima concentrazione sono presenti alla quota di 25 Km in corrispondenza delle grandi depressioni, mentre basse concentrazioni sono associate alle zone di alta pressione. Questo fatto mette in luce un legame tra la alta e la bassa atmosfera che potrà forse rivestire notevole importanza quando se ne saprà di più e che comunque dimostra come anche la conoscenza dei fenomeni in alta atmosfera può essere utile per comprendere cosa succede nei "centri del tempo" anche se apparentemente non sembrerebbe possibile.

A questo punto è lecito porsi la seguente domanda :

Come possiamo descrivere i movimenti dell'atmosfera e le grandezze che ne prendono parte ?

2.2 Equazioni fondamentali della meteorologia

Prima di definire le equazioni rinfreschiamo un po' di concetti di fisica generale e precisamente il moto di una particella in un fluido rotante.

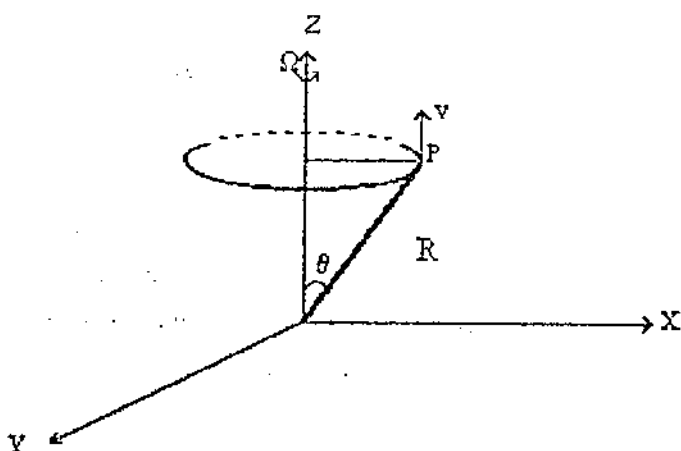


fig.1)

Consideriamo una particella P di massa unitaria immersa in un fluido animato di moto rotatorio e dotata di velocità U. Ogni punto del fluido si muoverà quindi rispetto ad un osservatore esterno con una velocità

$$|V| = |\Omega \wedge R| = \Omega R \sin \theta \quad (2.1)$$

Ora per definizione un sistema ruotante è un sistema non inerziale, quindi bisognerà definire le leggi del moto rispetto ad un sistema inerziale per poter parlare in termini assoluti.

Rispetto ad un sistema inerziale la velocità del punto P viene ad essere:

$$V_a = V_r + V_o \quad (2.2)$$

dove a sta per assoluto, r per relativo e V_o è la velocità con cui si muove il sistema non inerziale rispetto a quello inerziale. Nel nostro caso V_o è data dalla 2.1). Sostituendo questa espressione nella 2.2) ed esprimendo la velocità come derivata rispetto al tempo, otteniamo:

$$\left[\frac{dR}{dt} \right]_a = \left[\frac{dR}{dt} \right]_r + \Omega \wedge R \quad (2.3)$$

La 2.3) mi dice come associare la variazione lagrangiana di un vettore R qualunque nel riferimento inerziale a quella nel riferimento non inerziale. Essendo stata ricavata in modo generale, nulla ci vieta di applicarla ad un qualsiasi altro vettore:

$$\left[\frac{dV_a}{dt} \right]_a = \left[\frac{dV_a}{dt} \right]_r + \Omega \wedge V_a \quad 2.4)$$

che sostituendo a secondo membro l'espressione per V_a diventa:

$$\left[\frac{dV_a}{dt} \right]_a = \left[\frac{dV_r}{dt} \right]_r + 2\Omega \wedge V_r + \Omega \wedge \Omega \wedge V_r \quad 2.5)$$

Il termine a primo membro è l'accelerazione assoluta, misurata nel riferimento assoluto, che dovrà tener conto di tutte le forze che agiscono sulla particella. Il 1° termine a II° membro è l'accelerazione della particella misurata nel sistema non inerziale (misurabile giornalmente, in un qualsiasi riferimento), mentre gli ultimi due termini sono caratteristici della non inerzialità del sistema e definiscono rispettivamente:

$$2\Omega \wedge V_r$$

l'accelerazione di Coriolis (Forza deviante per unità di massa).

L'effetto è quello di deviare la particella a destra della sua traiettoria di moto nell'emisfero boreale e a sinistra in quello australe (fig. 2)

La componente verticale si trascura in quanto il peso apparente della particella ha variazioni per ordini di grandezza molto piccoli.

$$\Omega \wedge \Omega \wedge V_r$$

Accelerazione centrifuga

Per completare la 2.5) dobbiamo quindi esplicitare il termine a I° membro:

$$\left[\frac{dV_a}{dt} \right] = g + F_p + F_a \quad 2.6)$$

dove g : forza di gravità; F_p : forze di pressione; F_a : Forza di attrito

Le forze di pressione sono le più importanti in atmosfera, ricaviamole.

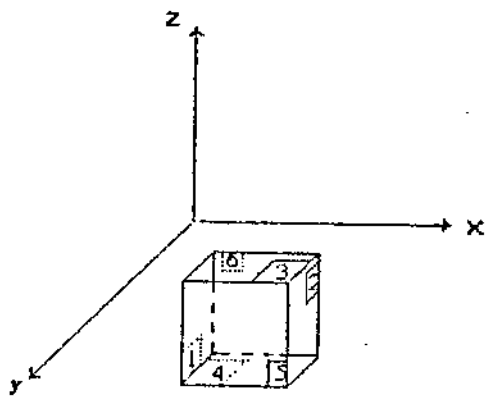


fig. 3)

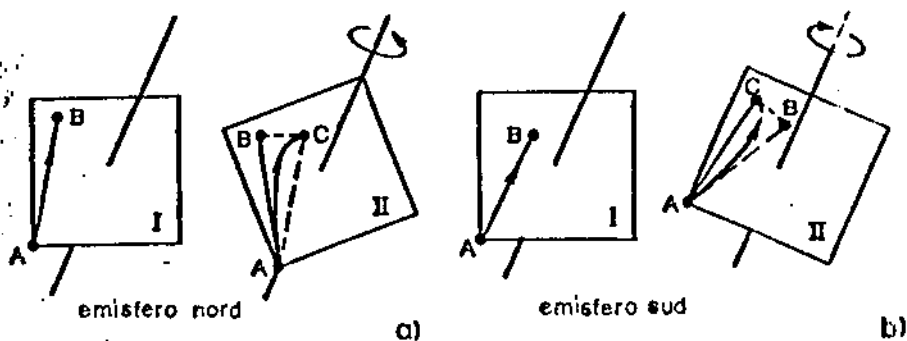


Fig. 2. - Effetto della semplice rotazione del piano orizzontale attorno alla verticale sul moto di una particella di aria:

- a) Nell'emisfero Nord: mentre la particella muove in direzione AB il piano ruota in senso antiorario. L'osservatore solidale al piano vedrà la traiettoria deviare verso C (Posiz. I e II prima e dopo la rotazione).
- b) Nell'emisfero Sud: Essendo oraria la rotazione del piano, l'osservatore solidale ad esso vedrà il moto AB (posizione I) procedere secondo AC (posiz. II).

Le componenti lungo le tre direzioni saranno date rispettivamente dalla differenza tra le pressioni esistenti sulle facce opposte del cubetto in figura, lungo la direzione voluta, e moltiplicata per la sezione interessata :

$$F_x = (p_1 - p_2) \delta y \delta z; F_y = (p_3 - p_4) \delta x \delta z; F_z = (p_5 - p_6) \delta x \delta y \quad (2.7)$$

Supponendo di avere a che fare con incrementi infinitesimi si può sviluppare p in serie di Taylor rispetto al centro O (considerando per semplicità la sola componente x):

$$p_1 = p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + O(\delta x^2); \quad p_2 = p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + O(\delta x^2);$$

pertanto sostituendo nella prima delle 2.7) si ottiene :

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ ed analogamente per le altre} \\ F_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.8)$$

=> da cui deriva :

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.9)$$

La forza di gravità è presto definita: $\mathbf{g} = (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + g\mathbf{k}); g = -GM/R^2 \quad (2.10)$

Infine abbiamo l'attrito. Per ricavarne l'espressione considereremo il seguente esempio: supporremo di avere degli strati d'aria estesi fino alla quota z , che la superficie terrestre sia perfettamente liscia (eliminando le rugosità che potrebbero creare turbolenza negli strati) e che il campo di moto sia solo orizzontale:

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (2.11)$$

Inoltre considereremo una lastra al livello z , in moto sotto l'azione di una forza costante F parallela allo strato. In tali condizioni la lastra, pur sotto l'azione di una forza, tenderà a muoversi con velocità V costante. Ciò è dovuto all'azione esercitata dagli strati sottostanti la lastra, azione che si manifesta attraverso la forza di attrito. Fisicamente avremo la situazione in figura:

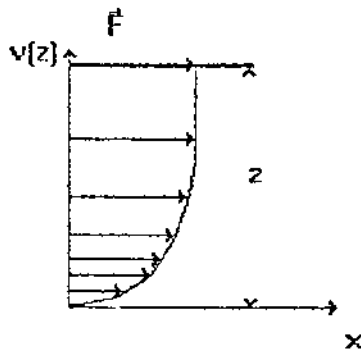


fig. 4)

Nello strato z , per effetto del rallentamento che ogni strato genera su quello immediatamente sovrastante, si avrà un gradiente di velocità verticale e la forza d'attrito, uguale ed opposta alla forza motrice F , sarà data da:

$$\tau = \mu S \frac{v}{z} \quad (2.12)$$

dove μ : coefficiente di viscosità dinamica; S : area dello strato. Per l'aria $\mu = 1.7 \times 10^{-10} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

Nel caso generale, che si verifica nella realtà, potremo ricavare la forza d'attrito con lo stesso ragionamento fatto per ricavare le forze di pressione e considerando il limite della 2.12) su distanze infinitesimali:

$$\tau_x = \mu S \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.13)$$

Prendiamo in esame il solito cubetto di volume infinitesimo $\delta x \delta y \delta z$:

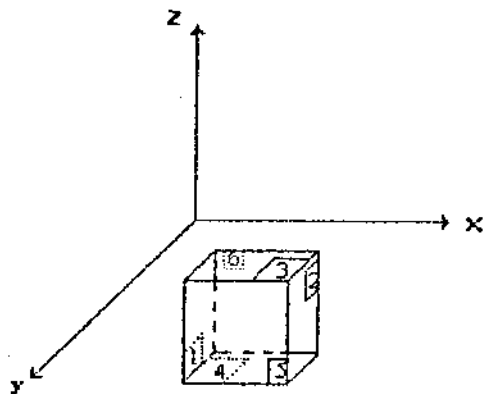


fig. 5)

Per le componenti dell' attrito bisogna ragionare però in modo leggermente diverso rispetto al caso del gradiente di pressione, ed un pochino più accorto, infatti per ogni componente possiamo avere tre contributi e precisamente due di shear (se pensiamo all' esempio precedente possiamo avere variazione lungo la verticale sia di U che di V), ed uno di compressione - allungamento. Pertanto converrà introdurre la notazione τ_{ij} intendendo con i la direzione della componente e con j la direzione che fornisce il contributo; in questa notazione la τ_x ricavata dall'esempio si scrive:

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.14)$$

A questo punto possiamo considerare il cubetto e ricavare il contributo τ_{xz} come differenza tra le facce 3 e 4 del cubetto:

$$\tau_{xz} = \left[\tau_{xz}^0 + \frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial z} \frac{\delta z}{2} - \tau_{xz}^0 + \frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.15)$$

che scritta in forma compatta diventa : $\tau_{ij} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$

Considerando che $\tau_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\mu}{\rho} \tau_{ij}$ otteniamo $\Rightarrow \tau_x = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u$

Ripetendo il medesimo ragionamento per gli altri contributi otteniamo:

$$\tau = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.16)$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per riscrivere in forma conclusiva l'equazione (2.5):

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g}^* + \eta \nabla^2 \mathbf{V}_r = \left[\frac{d \mathbf{V}_r}{dt} \right]_r + 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_r \quad (2.17)$$

dove abbiamo considerato $\mathbf{g}^* = \mathbf{g} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{R}$, definita come gravità effettiva, accorgimento reso possibile dal fatto che sia la gravità che la forza centrifuga sono dipendenti dalla posizione.

2.3) Differenziazione totale : formulazione lagrangiana ed euleriana

L'equazione del moto (2.17) permette di ricavare il differenziale totale della velocità, ovvero la variazione di velocità di una particella d'aria, misurata in un riferimento solidale con essa. Questo modo di procedere è il cosiddetto metodo lagrangiano. Si può ben capire come questa formulazione non sia molto pratica, soprattutto in meteorologia dove le grandezze sono misurate nella maggior parte dei casi da punti fissi al suolo (stazioni meteorologiche). E' necessario poter esprimere quindi la variazione locale espressa dalla (2.17), ossia considerare un punto di vista euleriano. Dall'analisi sappiamo che la derivata totale è esprimibile attraverso il formalismo del differenziale totale e quindi :

$$\frac{d \mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{g}^* \quad (2.18)$$

che riscritta per componenti diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_u \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (2.19)$$

con $f = 2 \Omega \sin \phi$

Scritto in questo modo il sistema mette subito in mostra l'aspetto che lo caratterizza, la sua non-linearità. Essa è data dal termine $\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}$ e fa in modo che il sistema (2.19) non abbia soluzione unica $\forall t$. In altre parole, date le condizioni iniziali, non è possibile integrare le (2.19) e trovare un'unica soluzione definita per ogni istante.

Per risolvere questo problema l'unica soluzione è l'integrazione numerica per passi successivi utilizzando metodi opportuni, dei quali parleremo più diffusamente in seguito. Per il momento focalizzeremo la nostra attenzione su due cose:

- Effettuare un'analisi di scala sui termini delle (2.19) per valutarne l'ordine di grandezza
- Chiudere il sistema (2.19) che per il momento presenta 3 equazioni in 5 incognite u, v, w, p, ρ

2.3.1 - Analisi di scala

L'analisi dimensionale o di scala è uno strumento applicativo molto potente e semplice allo stesso tempo che ci consente di semplificare le equazioni del moto.

Il sistema (2.19) infatti è un sistema di validità generale, ed ha pertanto al suo interno gli effetti di tutte le scale di moto presenti in fluidodinamica. L'analisi di scala ci permette di semplificarlo selezionando una scala specifica, così da studiare una sola delle possibili scale di moto permesse.

Per ottenere questo risultato quello che si fa in pratica è di sostituire alle grandezze presenti nelle equazioni i valori medi comunemente osservati alla scala che si vuole studiare.

Trattando questo corso prevalentemente di meteorologia sinottica assumeremo come valori delle grandezze in gioco i valori caratteristici di questa scala pari a :

$$\begin{array}{ll} U \Rightarrow 10 \text{ m/s} & \frac{\Delta p}{\Delta x} \Rightarrow \frac{10 \text{ mb}}{10^6 \text{ m}} = 10^{-3} \text{ N/m}^3 \\ W \Rightarrow 10^{-2} \text{ m/s} & \frac{\Delta p}{\Delta z} \Rightarrow \frac{1000 \text{ mb}}{10^4 \text{ m}} = 10 \text{ N/m}^3 \\ L \Rightarrow 10^6 \text{ m} & f \Rightarrow 10^{-4} \text{ s} \\ T = \frac{L}{U} = 10^5 \text{ s} & \rho \Rightarrow 1 \text{ Kg/m}^3 \end{array}$$

In tal modo ciascun termine nelle (2.19) sarà caratterizzato da un diverso ordine di grandezza :

$$\begin{array}{lll} \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{U^2}{L} = 10^{-4} & \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta x} = 10^{-3} & f u \Rightarrow f U = 10^{-3} \\ \frac{dw}{dt} \Rightarrow \frac{W U}{L} = 10^{-7} & \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta z} = 10 & g \Rightarrow 10 \end{array}$$

A questo punto possiamo fare diverse osservazioni:

- Le accelerazioni orizzontali sono di un'ordine di grandezza inferiore rispetto alle forze in gioco, pertanto in prima approssimazione potranno essere trascurate.
- L'accelerazione verticale è praticamente nulla rispetto alle forze presenti nella 3^a equazione del moto, dando luogo al cosiddetto bilanciamento idrostatico tra campo di pressione e campo gravitazionale.

L'analisi di scala ci mostra quindi, a scala sinottica, un'atmosfera sostanzialmente in equilibrio.

Quindi, a meno di errori del 2^o ordine, le (2.19) possono riscriversi nel modo seguente :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = f u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \end{array} \quad (2.20)$$

A questo punto lo studente curioso potrebbe chiedersi : Esistono altre scale di moto ? Cosa accade al sistema se cambiamo i valori di scala ?

Effettivamente esistono altre scale di moto, non solo ma è possibile classificarle oltre che in funzione dei valori caratteristici di scala anche in funzione di un parametro fondamentale, il n° di Rossby :

$$R_o = \frac{U}{fL}$$

Tale termine esprime il rapporto tra accelerazione (forza inerziale U^2/L) e forza di Coriolis (fU); laddove $R_o < 1$ il termine inerziale è più piccolo rispetto alla forza deviante ed al gradiente di pressione e l'atmosfera è nella situazione descritta matematicamente dalle (2.20), e prende il nome di bilanciamento geostrofico.

Le scale caratterizzate da $R_0 > 1$ invece, sono quelle più piccole e contraddistinte da tempi caratteristici più brevi. Da un punto di vista generale le scale di moto possono essere suddivise secondo la tabella 1 :

Scala di moto	R_0	$\lambda/4$	$T/4$
Microscala	-	1 mt	sec - min
Onde di gravità	10^2	≈ 1 km	min - ora
Mesoscala	$10^2 - 10$	$\approx 5 - 10$ Km	ora
Piccola sinottica	1	≈ 100 Km	ora - giorno
Sinottica	10^{-1}	$\approx 100 - 1000$ km	giorni
Planetaria	$< 10^{-1}$	> 1000 Km	giorni - settimane

(tab.1)

$\lambda/4$ e $T/4$ sono, per definizione, la lunghezza ed il tempo di scala e rappresentano l'ordine di grandezza spazio - temporale per il quale si producono variazioni significative delle grandezze meteorologiche per la scala considerata. Tanto per fare qualche esempio la scala sinottica è quella in corrispondenza della quale viaggiano la maggior parte delle perturbazioni, tranne quelle più intense che originano nella piccola sinottica, e dove nascono i cicloni extratropicali. Le scale più grandi, denominate anche climatologiche, danno ospitalità alle onde planetarie, che racchiudono l'intero globo terrestre, mentre sull'altro lato della medaglia non vanno trascurate le piccole scale (per intenderci al di sotto dei 2 Km), in corrispondenza delle quali possono aver origine fenomeni a volte intensissimi come i tornado e le trombe d'aria.

Una menzione a parte, infine, per la mesoscala dove si manifestano tutti gli effetti locali, dovuti ad esempio alle montagne, ai laghi o al mare (breeze di mare) e anche fenomeni temporaleschi innescati da intensa convezione.

Per ciò che riguarda la seconda domanda in parte abbiamo già risposto se si guarda la tabella e si pensa a quanto appena detto. Infatti considerare valori di scala diversi può voler dire considerare fenomeni anche fisicamente diversi, tanto per portare un esempio un sistema convettivo temporalesco sicuramente non soddisferà la terza delle 2.20) visto che le accelerazioni verticali in una situazione del genere sono tutt'altro che trascurabili ed il sistema nel suo complesso è ben lungi dall'essere idrostatico.

Risulta quindi indispensabile per descrivere un fenomeno fisico, il saperlo valutare in modo oculato anche e soprattutto come ordine di grandezza, per non incorrere poi in non desiderati errori di valutazione.

Sperando di aver soddisfatto le curiosità dello studente torniamo alle 2.20).

Le prime due equazioni di esso esprimono il cosiddetto vento geostrofico, che come vediamo è una buona approssimazione del vento reale laddove le isobare siano regolari e non presentino forte curvatura mentre la terza equazione, è invece l'equazione dell'idrostatica ed esprime l'equilibrio tra il campo di pressione e quello di densità (temperatura).

2.3.2 - Vento geostrofico

Considereremo per semplicità un moto rettilineo e stazionario, cosicché le uniche forze agenti saranno il gradiente di pressione (P) e la forza deviante (D). Sotto queste ipotesi la situazione fisica è quella di fig.6. rappresentabile matematicamente attraverso le condizioni:

$$V = (u, 0, 0) \quad u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

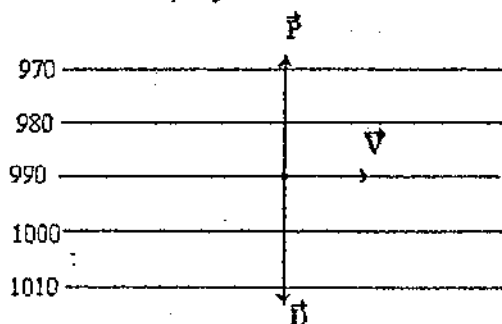


fig. 6)

Questo fa sì che il moto spontaneo, che sarebbe nel senso del gradiente di pressione (lungo P), venga influenzato dalla forza di Coriolis (D) fino a disporsi parallelo alle isobare (fig.7):

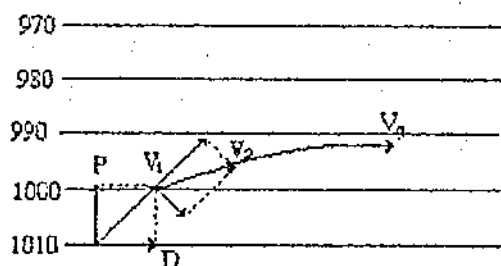


fig. 7)

Nei bassi strati la cosa si complica in quanto oltre alla forza deviante si somma l'attrito e la situazione diventa quella di fig. 8:

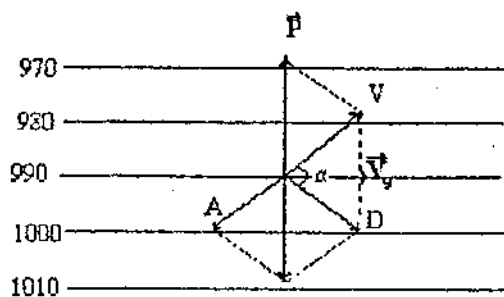


fig. 8)

L'attrito è fondamentale in quanto non agisce solo da freno ma causa anche una deviazione del vento, di un angolo α rispetto alla direzione del vento geostrofico, dipendente dalla natura del terreno, dalla stabilità dell'aria e dalla latitudine (Tab.2):

Tipo di superficie	Latitudine 20°		Latitudine 45°		Latitudine 70°	
Stab.		Insta b.	Stab.	Inst.	Stab.	Inst.
Mare	25°	40°	15°	30°	10°	25°
Terreno pianeggiante	35°	50°	25°	40°	20°	35°
Terreno molto accidentato	45°	60°	35°	50°	30°	45°

(tab.2)

In altre parole se i moti dell'aria fossero stazionari e senza attrito ci troveremmo sempre nella situazione di fig.6 col risultato che non ci sarebbe mai un livellamento dei campi barici, con la conseguente alternanza del tempo meteorologico. Fortunatamente la non completa stazionarietà dei moti nella libera atmosfera e la presenza dell'attrito nei bassi strati (1000 - 1500 mt.) favoriscono il livellamento barico e l'alternanza continua di situazioni meteorologicamente diverse. Per rendersi conto di ciò basta osservare una carta al suolo e notare come i gradienti di pressione più intensi si abbiano sugli oceani e sulle distese polari dove l'attrito è molto basso, mentre si affievoliscono grandemente nell'attraversare regioni continentali.

Per avere una stima del V_g si può usare una semplice carta meteorologica, raffigurante le linee di livello di una data superficie isobarica, avendo l'accortezza di utilizzare le 2.20) in una forma leggermente diversa. Consideriamo infatti queste equazioni nella loro forma incrementale :

$$\begin{aligned} f u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta y} \\ f v &= \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \\ g &= -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sostituendo p ricavato dalla terza delle 2.21) all'interno delle altre due equazioni si ottiene :

$$\begin{aligned} u &= \frac{g}{f} \frac{\Delta z}{\Delta y} \\ v &= -\frac{g}{f} \frac{\Delta z}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.22)$$

In questo modo, ricavando dalla carta meteorologica $\frac{\Delta z}{\Delta y}$ e $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ e considerando per f e g i valori noti, il calcolo del V_g può diventare un utile esercizio didattico (es. n°5). I valori così ottenuti risultano una buona approssimazione del vento reale per l'atmosfera al di sopra dello strato d'attrito, mentre lo sovrastimano all'interno di tale strato, per i motivi anzidetti. Tenendo presenti gli ordini di grandezza che ci hanno consentito di arrivare a queste conclusioni andiamo a calcolare il n° di Rossby :

$$Ro \approx \frac{U}{fL} \approx \frac{10}{10^{-4} \cdot 10^6} \approx 10^{-1}$$

che è proprio rappresentativo, come del resto ci si aspettava, della scala sinottica. Quindi, ogni qualvolta $R_0 \ll 1$ l'approssimazione geostrofica è una buona stima del vento reale.

Un concetto intimamente legato al vento geostrofico ed altrettanto importante è quello di vento termico. Ciò risulta evidente se si considera che in presenza di un gradiente orizzontale di temperatura deve aversi uno shear verticale del vento geostrofico, come illustrato in fig.9, tenuto conto che stiamo ipotizzando l'atmosfera idrostatica e del legame tra vento geostrofico e gradiente di pressione.

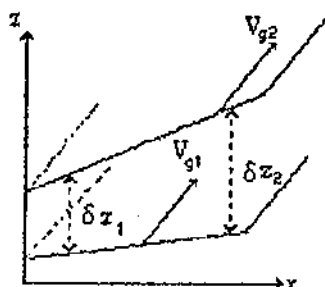


fig. 9)

In termini matematici possiamo considerare l'equazione idrostatica esplicitando la densità ρ attraverso l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\delta z = -\frac{\delta p}{\rho g} = -\frac{\delta p}{p} \frac{RT}{g} \quad (2.23)$$

Dalla figura risulta $\delta z_2 > \delta z_1$, pertanto per la 2.23) sarà $T_2 > T_1$. Le equazioni che forniscono la variazione del vento geostrofico con la quota possono ricavarsi facilmente se consideriamo un sistema di riferimento isobarico, nel quale risulta:

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_p \\ v_g &= \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_p \end{aligned} \quad (2.24)$$

Differenziando le 1.24) rispetto a p otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial \ln p} &= -\frac{R}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \\ \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} &= \frac{R}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f} \mathbf{k} \wedge (\nabla T)_p \quad (2.26)$$

dove si è usata la condizione $\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}$.

La 2.26) prende il nome di equazione del vento termico, che come si vede altro non è se non uno shear verticale del vento geostrofico.

Vettorialmente parlando possiamo ricavarlo facendo materialmente la differenza tra i venti geostrofici presenti a due livelli isobarici diversi; dalle 2.23) risulta :

$$\begin{aligned} u_T &= -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (\phi_1 - \phi_0) \\ v_T &= \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\phi_1 - \phi_0) \end{aligned} \quad 2.27)$$

Dalle quali è immediato osservare che il vento termico è proporzionale allo spessore esistente tra le due superfici isobariche considerate (e quindi al loro ΔT) (vedere esercizi 8 e 9).

Il vento termico, oltre a stabilire importanti relazioni tra campo del vento e temperatura, è anche un interessante strumento diagnostico in quanto permette di rilevare le avvezioni di temperatura.

L'espressione in forma vettoriale della 2.27)

$$\mathbf{V}_T = \frac{1}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla (\phi_1 - \phi_0) \quad 2.28)$$

ci dice inoltre che il vento termico è un vento che spira parallelo alle isoterme in modo tale da lasciare sempre alla sua destra l'aria calda.

In virtù di queste considerazioni è immediato ricavare che una rotazione antioraria (oraria) del vento geostrofico con la quota prelude ad un'avvezione fredda (calda) nello strato considerato (fig. 10 ed esercizio 10). Un modo estremamente semplice ed efficace per valutare il vento termico è rappresentato dalla carta delle topografie relative (fig. 11a - 11b), un tipo di carta meteorologica che mostra lo spessore tra due superfici isobariche qualsiasi.

In figura è mostrata la carta delle topografie tra le superfici isobariche 1000mb e 700 mb; in base agli spessori è possibile individuare le masse di aria relativamente più fredde e più calde, ed il vento termico, parallelo alle linee di isospessore (rappresentative delle isoterme).

Un'utile ed istruttiva applicazione di questi concetti è stata fatta per l'incidente di Chernobyl, per ricavare una stima del movimento nei bassi strati della nube radioattiva, utilizzando proprio il vento termico e le carte delle isallobare.

In particolare, conoscendo il campo del vento ad 700 mb (fig. 11a) ed il vento termico tra le superfici 700mb e 1000mb (fig. 11b), si può ricavare la rotazione del vento con la quota nello strato suddetto e stabilire così in modo attendibile la traiettoria seguita dalle emissioni radioattive nello strato prossimo al suolo.

I risultati ottenuti, seppur qualitativi, mostrano però un accordo con le traiettorie sperimentali tale da ritenere questi concetti dei validi strumenti a livello diagnostico e pratico.

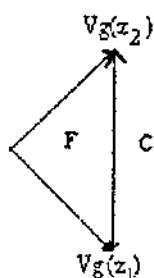


fig. 10)

WIND AT 700 hPa: 26 4 86 0 GMT + 24 H



Fig. 11a

0.2160-02
MAXIMUM VECTOR

RELATIVE TOPOGRAPHY 700-1000 MB, 26 4 86 0 GMT + 24 H

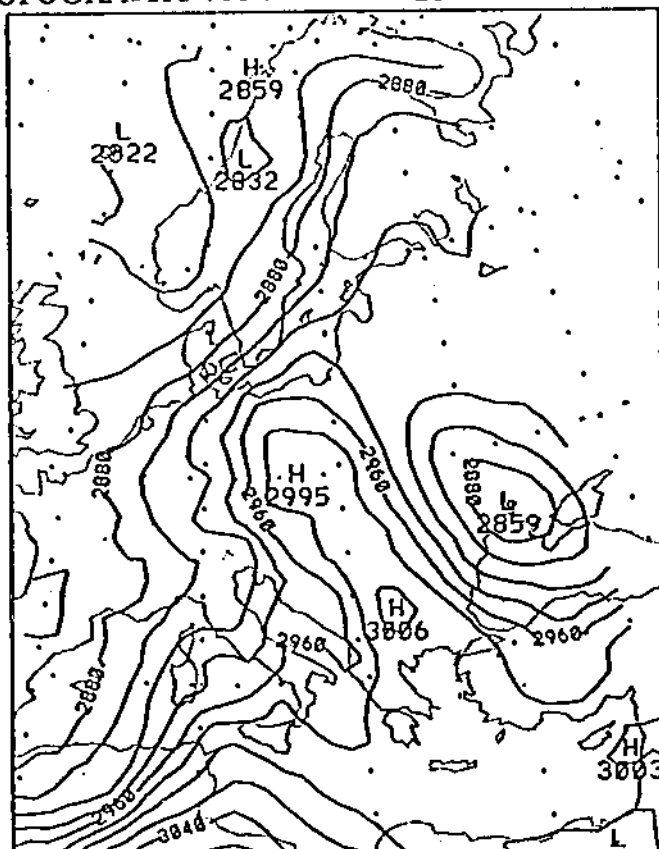


Fig. 11b

2.3.3 - Vento di gradiente

In regioni di forte curvatura, dove il vento geostrofico può lasciare a desiderare come stima del vento reale, può essere più realistico considerare il vento di gradiente. A tale scopo introduciamo un nuovo sistema riferimento, le coordinate naturali, definito dalle direzioni, $\mathbf{z}$, $\mathbf{t}$ $\mathbf{n}$ rispettivamente asse verticale, asse tangente alla traiettoria ed asse normale ad essa (fig.12), che soddisfano le seguenti convenzioni:

$\hat{\mathbf{z}} > 0$ verso l'alto; $\hat{\mathbf{n}} > 0$ alla sinistra della direzione del moto; $\hat{\mathbf{t}} > 0$ lungo la direzione del moto.



fig.12)

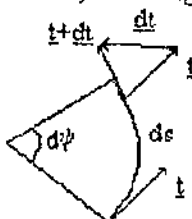


fig.13)

In questo sistema di coordinate la velocità può essere scritta nel modo seguente:

$$\mathbf{V}_h = V \mathbf{t} \Rightarrow \frac{d\mathbf{V}_h}{dt} = \frac{dV}{dt} \mathbf{t} + V \frac{d\mathbf{t}}{dt} \quad (2.29)$$

Tenendo presente la fig. 13 il 1° termine a 1° membro può essere riscritto come:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{\mathbf{n}}{R} \quad ds = R d\psi \Rightarrow \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R} \quad (2.30)$$

e quindi risulterà: $\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \mathbf{n} \frac{V}{R}$

$$\text{da cui} \Rightarrow \frac{d\mathbf{V}_h}{dt} = \mathbf{t} \frac{dV}{dt} + \mathbf{n} \frac{V^2}{R} \quad (2.31)$$

Così facendo l'equazione del moto sul piano orizzontale viene ad essere espressa in funzione delle nuove coordinate:

$$\text{lungo } \mathbf{t}: \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\text{lungo } \mathbf{s}: \frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (2.32)$$

Il cambiamento rispetto al sistema (2.20) sta nel fatto che ora abbiamo la forza centrifuga (V^2/R). Per i moti lungo le isobare si ha $(\partial p / \partial s) = \text{cost.}$ e quindi $V = \text{cost.}$, ottenuta dalla seconda delle (2.32) dal bilanciamento delle tre forze in gioco (centrifuga, di Coriolis, gradiente).

Per far ciò dovremo risolvere l'equazione di secondo grado

$$\frac{V^2}{R} + fV + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (2.33)$$

che ha come soluzione:

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}} \quad (2.34)$$

A questo punto bisognerà discutere i diversi casi ricavabili dalla 2.34) imponendo come condizione che le V siano reali e non negative.

a) $R > 0$

a.1) $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$

non ammette soluzioni fisiche; infatti se pure il radicando fosse positivo sarebbe comunque minore di $fR/2$

a.2) $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$

ha una sola soluzione permessa, la radice positiva, pari a:

$$V = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} + \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}}$$

che corrisponde alla figura (14 a) e definisce una circolazione ciclonica regolare.

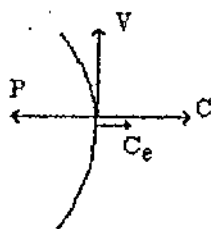


fig.14a)

b) $R < 0$

b.1) $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$

Esiste una sola soluzione, la radice positiva :

$$V = -\frac{fR}{2} + \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}}$$

che stavolta però definisce una circolazione ciclonica anomala (fig. 14b) :

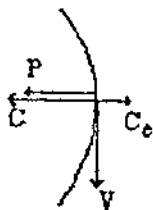


fig.14b)

b.2) $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$

In questo caso sono ammesse entrambe le soluzioni:

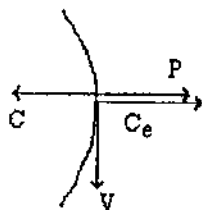


fig.14c)

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}}$$

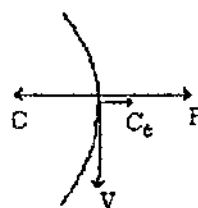


fig.14d)

Tali soluzioni descrivono rispettivamente un' anticiclonica anomala ed un' anticiclonica regolare (fig. 14 c-d).

Le cosiddette circolazioni anomale, non sono molto facili da ottenere, in quanto non appena si manifesta un' accelerazione dovuta al gradiente di pressione, la forza di Coriolis tende a produrre un normale equilibrio di gradiente.

Che cosa abbiamo ottenuto di diverso rispetto al vento geostrofico ?

In coordinate naturali il vento geostrofico assume la forma :

$$V_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.35)$$

che sostituita nelle 2.33) permette di stabilire un legame tra i due tipi di vento :

$$\frac{V^2}{R} + fV - fV_g = 0 \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow V \left(\frac{V}{R} + f \right) = fV_g \Rightarrow \frac{V_g}{V} = 1 + \frac{V}{fR} \quad (2.37)$$

Analizzando la 2.37) si osserva che per $R > 0$ (flusso ciclonico) il vento geostrofico sovrastima il vento di gradiente, mentre lo sottostima per $R < 0$ (flusso anticiclonico).

E' interessante osservare che per $R \rightarrow \infty$ (isobare rettilinee) $V_g \rightarrow V$, ed inoltre il termine di scostamento è proprio R_o , e quindi fintanto che $R_o \ll 1$ V_g è un'ottima approssimazione del vento reale, come per altro avevamo già ricavato per altra via (esercizio 6).

Inoltre l'uso del vento di gradiente comporta il dover conoscere il raggio di curvatura delle traiettorie e quindi l'uso di coordinate cilindriche, che richiedono una mole di calcoli non indifferente; d'altro canto il vantaggio che si ricava da questa rappresentazione è comunque piccolo a scala sinottica e quindi si preferisce adoperare il vento geostrofico all'interno delle equazioni del moto, piuttosto che il vento di gradiente.

2.4 - Chiusura del sistema 2.20) : Principi di conservazione della massa e del calore

Finora abbiamo lavorato esclusivamente sulle tre componenti del moto, tralasciando il sistema nella sua totalità, che invece presenta cinque incognite (u, v, w, p, ρ). Pertanto il prossimo passo sarà la cosiddetta chiusura del sistema, fare in modo cioè che abbia un pari numero di equazioni e di incognite. A tal proposito introdurremo altri due principi di conservazione, quello della massa e quello del calore che ci forniranno le due equazioni di cui abbiamo bisogno.

2.4.1 - Principio di conservazione della massa

Consideriamo un cubetto (fig.15) e la relazione esistente tra fluido entrante e fluido uscente attraverso una sezione normale all'asse x (facce 1 e 2) :

$$\rho_1 u_1 \delta y \delta z - \rho_2 u_2 \delta y \delta z = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.38)$$

La 2.38) esprime la variazione di massa all'interno del cubetto in termini del bilancio tra fluido entrante e fluido uscente.

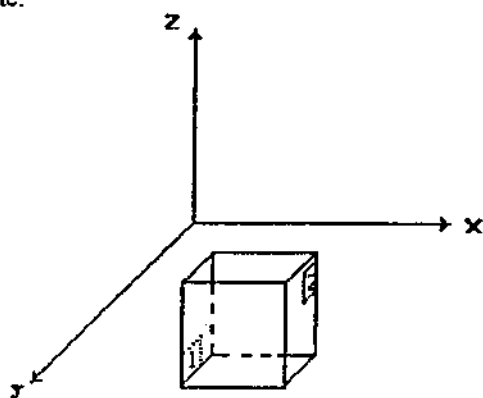


fig.15)

Sviluppando il I° membro in Serie di Taylor rispetto al centro del cubetto possiamo riscrivere la 2.38) nel modo seguente :

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 \delta y \delta z - \rho_2 u_2 \delta y \delta z &= \left[\left(\rho_0 u_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \delta x \right) - \left(\rho_0 u_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ \Rightarrow \rho_1 u_1 \delta y \delta z - \rho_2 u_2 \delta y \delta z &= - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dV \end{aligned} \quad (2.39)$$

Facendo lo stesso ragionamento per le altre due facce del cubetto otteniamo :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\nabla(\rho \mathbf{v}) dV \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \rho \quad (2.40)$$

Utilizzeremo ora la II delle 2.40) per effettuare alcune considerazioni fisiche; innanzitutto il risultato ottenuto mostra che la variazione di densità in un punto nello spazio è data da due effetti :

a) Avvezione di densità : Trasporto di aria con densità diversa (aria più o meno calda/fredda) nel punto di osservazione, operato dal campo del vento. Se ad es. avessimo dell'aria relativamente più fredda in arrivo sulla nostra verticale tale termine sarebbe negativo ($\mathbf{v} \nabla \rho < 0$) e la tendenza sarebbe quindi ad un aumento di densità.

b) Divergenza di velocità : Il concetto di divergenza è intimamente legato a quello di densità, basti pensare all'effetto divergente di una compressione (aumento locale di densità) in un fluido : in un caso del genere il fluido tenderà ad allontanarsi (a divergere) dal punto in cui si sta avendo la compressione proprio per compensare questo effetto e ristabilire la situazione di partenza. Pertanto se nel nostro cubetto tenderà ad affluire aria più velocemente di quanta ne esca (convergenza, $\nabla \mathbf{v} < 0$), il risultato sarà di produrre un aumento locale di densità ($-\rho \nabla \mathbf{v} > 0$) e viceversa.

Una formulazione ancor più efficace della 2.40) è quella in coordinate isobariche x, y, p :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.41)$$

dove $\omega = \frac{dp}{dt} \Rightarrow$ analogo della velocità verticale in coordinate cartesiane.

La 2.41) ha due vantaggi rispetto alle 2.40) :

- a) E' un'equazione diagnostica (non contiene derivate temporali)
- b) Permette di ottenere una stima dei moti verticali dopo aver stabilito una relazione tra w e ω .

Tale relazione può essere ricavata esplicitando la relazione che definisce ω :

$\Rightarrow$ ponendo $\mathbf{v}_h = \mathbf{V}_g + \mathbf{V}'$ con $\frac{|\mathbf{V}'|}{V_g} \ll 1$ otteniamo :

$$\Rightarrow \omega = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}' \nabla p - \rho g w \quad 2.43)$$

Il termine $\mathbf{V}_g \nabla p$ è nullo per definizione di vento geostrofico, essendo questi parallelo alle isobare.

L'analisi di scala dei termini della 2.43) mostra :

$$\frac{\delta p}{\delta t} \approx 10 \text{ mb/g}; \quad \mathbf{V}' \nabla p \approx 1 \text{ m/s} * 0,01 \text{ mb/Km} = 1 \text{ mb/g}; \quad \rho g w \approx 100 \text{ mb/g}$$

che in prima approssimazione permette di scrivere :

$$\omega = \rho g w \quad 2.44)$$

In linea di principio quindi, accoppiando la 2.42) e la 2.44) sarebbe possibile ricavare le correnti verticali risolvendo il sistema:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

$$\omega = -\rho g w \quad 2.45)$$

Abbiamo volutamente sottolineato in linea di principio perché nella realtà questo procedimento non viene mai seguito in quanto non è sicuramente uno dei risultati più brillanti ai quali si può giungere, per il fatto che è basato sul calcolo della divergenza orizzontale del vento. A scala sinottica infatti questo termine è piccolissimo, teoricamente nullo, visto che il vento orizzontale tende ad essere geostrofico e quindi solenoidale ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$). Questo significa che gli unici contributi alla divergenza possono derivare solo da perturbazioni ageostrofiche, nel qual caso però anche un errore del 10% nella valutazione di u o v può provocare errori ben più gravi sulla divergenza, ed in ultima analisi su w .

Esistono comunque altri metodi per stimare w , fortunatamente, sui quali torneremo non appena avremo completato il sistema (2.20) introducendo il Principio di conservazione del calore.

2.4.2 - Principio di conservazione del calore

Per l'ultima equazione ci serviremo della conservazione del calore scritta in termini del 1° principio della termodinamica :

$$dQ = c_v dT + p d\alpha \quad 2.46)$$

Introducendo l'entalpia H otteniamo :

$$H = \frac{dQ}{dT} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho R} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2 R} \frac{d\rho}{dt} \quad \text{dove abbiamo utilizzato la legge di stato dei gas perfetti : } T = \frac{p}{\rho R}$$

$$\Rightarrow H = \left(\frac{c_p}{\rho R} - \alpha \right) \frac{dp}{dt} - \frac{c_p p}{\rho^2 R} \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow H = \frac{c_v}{\rho R} \frac{dp}{dt} - \frac{c_p p}{\rho^2 R} \frac{d\rho}{dt} \quad 2.47)$$

Se ora sostituiamo a II° membro l'equazione di continuità nella forma 2.40) otteniamo :

$$H = \frac{c_v}{\rho R} \frac{dp}{dt} + \frac{c_p p}{\rho R} \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{\rho R} (c_v \frac{dp}{dt} + c_p p \nabla \mathbf{v})$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\rho R H}{c_v} - \frac{c_p p}{\rho R} \nabla \mathbf{v} \quad 2.48)$$

La 2.48) rappresenta la variazione lagrangiana di pressione esprimibile come somma di due termini, un termine entalpico, che rappresenta gli scostamenti dalle condizioni di adiabaticità ($H=0$), ed uno di divergenza.

A questo punto con la 2.48) abbiamo completato le equazioni fondamentali che cercavamo ed abbiamo ottenuto :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_v - e_w \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_u \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + e_u - g \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \frac{c_p}{c_v} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{R \rho H}{c_v} \end{aligned} \quad -2.49)$$

Questo sistema teoricamente permetterebbe, conosciuto il valore iniziale delle variabili, di ricavare quello ad un istante successivo, fornendo i valori locali delle grandezze fisiche ad ogni istante voluto. Posto così il problema sembra di una facilità estrema, in realtà non è affatto vero, e ciò soprattutto a causa dei termini del tipo $\mathbf{v} \cdot \nabla u_i$ ($i=1,2,3$) a II° membro nelle equazioni del moto, che costituiscono la parte non - lineare del sistema. Tali termini sono estremamente critici, basti pensare che se non vi fossero le equazioni potrebbero essere risolte analiticamente ad ogni istante voluto. La soluzione delle 2.49) pertanto viene ottenuta ricorrendo a strumenti come le tecniche d'integrazione numerica, delle quali parleremo più avanti, e che consistono nel discretizzare le equazioni suddette passando agli incrementi, ed integrando per intervalli temporali necessariamente brevi.

Per ora ci limiteremo a ripercorrere la storia di queste equazioni vedendo come il Richardson tentò di risolverle nel 1922.

3 - Approssimazione quasi - statica

Il primo tentativo di risolvere le equazioni prognostiche 2.49) venne compiuto da L.F. Richardson, che ne definì le basi teoriche nel libro "Weather Prediction by Numerical Processes" del 1922.

L'idea di Richardson fu quella di considerare le equazioni nella loro forma incrementale, discretizzando le variabili su di un grigliato spazio temporale di modo che conoscendo i valori di esse su ciascun punto del grigliato ad un istante dato si sarebbero potuti ottenere quelli ad un istante successivo, e così via per n step temporali.

Per giungere all'integrazione delle 2.49) Richardson si trovò però ad affrontare due problemi :

a) Conoscere la w , non misurabile sperimentalmente

b) Stabilire un legame tra p e ρ , legame inesistente nelle 2.49), dove queste due grandezze sono definite da due equazioni diverse, slegate tra loro, consentendo così ad ognuna di esse di variare indipendentemente dall'altra. Questo come sappiamo non è possibile in quanto sia p che ρ sono grandezze termodinamiche di stato intimamente legate tra loro.

Per risolvere questo problema sarebbe sufficiente l'equazione idrostatica, così facendo però elimineremmo l'unica equazione dalla quale poter ricavare la velocità verticale. Bisogna quindi operare in altro modo, partendo però sempre dall'idrostatica :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{che derivata rispetto al tempo fornisce} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = -g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Sostituendo a II° membro l'equazione di continuità otteniamo :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = g \nabla_h (v_h \rho) + g \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \quad 3.1)$$

che integrata lungo la verticale a partire da un livello generico z_0 fino alla sommità dell'atmosfera fornisce :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -g \left[\left(\int_{z_0}^{\infty} (\rho \nabla_h v_h) dz \right) + \int_{z_0}^{\infty} (v_h (\nabla_h \rho)) dz \right] + g(\rho w)_{z_0} \quad 3.2)$$

dove abbiamo fatto le seguenti ipotesi :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\infty} = 0; \quad \rho w|_{\infty} = 0$$

La 3.2) prende il nome di equazione delle tendenze.

I primi due termini a II° membro di essa rappresentano rispettivamente i contributi di divergenza e temperatura alle variazioni locali di pressione; il terzo è invece la cosiddetta variazione di massa dal basso, ovvero se ad un certo livello dell'atmosfera le correnti sono ascendenti ($w > 0$) la pressione a quel livello tende ad aumentare in quanto c'è un afflusso d'aria nella colonna d'aria ad esso sovrastante.

Uguagliando la 3.2) con l'ultima delle 2.49) e semplificando i termini simili si ottiene :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{c_v}{c_p p} \left[g \int_{z_0}^{\infty} (\nabla (\rho v_h)) dz - \frac{c_p}{c_v} p \nabla v_h - v_h \nabla p + \frac{\rho R H}{c_v} \right] \quad 3.3)$$

che integrata lungo la verticale ci fornisce il risultato cercato :

$$w(z) = w(z_0) + \int_{z_0}^z f(\rho, v_h, p) dz \quad 3.4)$$

A questo punto possiamo riscrivere il sistema 2.49) senza i problemi inizialmente presenti :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_v - e_w$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_u$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \frac{c_p}{c_v} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{R \rho H}{c_v}$$

$$\rho = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$w(z) = w(z_0) + \int_{z_0}^z f(\rho, v_h, p) dz \quad 3.5)$$

Questo sistema prende il nome di sistema di approssimazione quasi - statica, fu realizzato da Richardson nel 1922 e descritto nel suo libro. Supponendo di volerlo risolvere su tutto il globo dovremmo porre le seguenti condizioni al contorno :

1) $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow$ Equazione della superficie terrestre

2) $\mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \Rightarrow$ Condizione di parallelismo vento -superficie terrestre

Esplicitando la 1) $z = h(x, y)$ e sostituendo nella 2) si ottiene :

$\mathbf{v} \cdot \nabla(z - h(x, y)) = 0 \Rightarrow w = \mathbf{v} \cdot \nabla h$ che esprime il nesso tra la presenza di un gradiente topografico e l'esistenza di una corrente verticale.

Richardson, avendo tutto ciò come punto di partenza tentò una previsione, risolvendo le equazioni 3.4) manualmente; si racconta che lui ed altri scienziati, fisici e matematici, abbiano lavorato ininterrottamente per giorni e giorni effettuando calcoli su calcoli.

Il metodo seguito fu quello di integrare le equazioni col metodo delle differenze finite, riassumibile in quattro passi :

a) Definizione di un grigliato nell'area di interesse, con punti equispaziati lungo le direzioni definite (generalmente coincidenti con gli assi cartesiani). In corrispondenza di ogni punto è possibile determinare ad ogni istante i valori delle variabili in gioco o tramite misurazione diretta o per interpolazioni dei campi esistenti.

b) Le derivate vengono approssimate in ogni punto facendo la differenza tra i valori delle variabili nei punti circostanti in modo che sia :

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{p_2 - p_1}{2d} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \text{fig. 16a)} \end{array}$$

Analogo ragionamento per le derivate temporali.

c) Tutte le derivate vengono risolte attraverso le differenze finite. La potenza di questo metodo sta nel fatto che permette di ridurre un sistema di equazioni differenziali in uno algebrico, per il quale è sempre possibile trovare una soluzione.

d) Ottenuto il valore al tempo $t + \Delta t$ è possibile ripetere la procedura per ottenere i valori al tempo $t + 2\Delta t$ e così via.

Purtroppo il risultato ottenuto non fu tra i più lusinghieri, i valori di pressione previsti risultarono di un ordine di grandezza più grandi di quelli effettivamente misurati.

All'epoca si pensò che il fallimento fosse dovuto alla scarsità dei dati iniziali, specialmente a causa della mancanza di sondaggi in quota. Una risposta più chiara al problema venne invece dopo la II^a guerra mondiale, soprattutto grazie

all'avvento dei primi computers che svolgevano in tempi molto più rapidi tutto il tedioso lavoro di calcolo. Si comprese allora che il metodo seguito da Richardson era stato inadeguato anche per altri due motivi :

a) Scarsa precisione nel calcolo dei termini a II° membro delle equazioni orizzontali del moto. Infatti per moti su traiettoria curvilinea i suddetti termini si bilanciano quasi e quindi è necessario valutarli con accuratezza per evitare errori sensibili su $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial t}$.

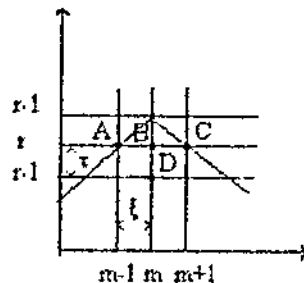
b) Instabilità numerica.

Questo problema fu quello che causò gli errori più grandi. Le equazioni meteorologiche infatti non risolvono solo i moti lenti (a scala sinottica, che interessavano Richardson), ma una grande varietà di essi, dalle onde veloci (acustiche) a quelle estremamente lente (onde di Rossby). Per far sì che le soluzioni ottenute risolvendo il sistema 3.4) col metodo delle differenze finite fossero stabili Richardson avrebbe dovuto svolgere l'integrazione usando intervalli di tempo più corti di quelli effettivamente usati i quali non gli hanno consentito di filtrare i moti indesiderati.

Per comprendere più da vicino questo fenomeno risolviamo la generale equazione delle onde :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.6)$$

Per far ciò andiamo a discretizzare la 3.6) sul grigliato in figura :



La 3.6) scritta in forma differenziale col metodo delle differenze finite risulta :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\phi_{m+1,r} + \phi_{m-1,r} - 2\phi_{m,r}}{4\xi^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\phi_{m,r+1} + \phi_{m,r-1} - 2\phi_{m,r}}{4\tau^2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\phi_{m,r+1} + \phi_{m,r-1} - 2\phi_{m,r}}{4\tau^2} = \gamma^2 \frac{\phi_{m+1,r} + \phi_{m-1,r} - 2\phi_{m,r}}{4\xi^2}$$

$$\Rightarrow \phi_{m,r+1} = f(\phi_{m,r}; \phi_{m+1,r}; \phi_{m-1,r}; \phi_{m,r-1}) \quad (3.7)$$

In particolare quindi il valore delle grandezze considerate sarà al punto m ed al tempo r+1, funzione dei valori nei punti A, B, C e D e ricavabile in modo algebrico, una volta stabiliti gli incrementi di griglia ξ e τ .

Il problema sorge proprio qui, infatti se consideriamo la retta rappresentativa del moto sul grigliato esso ha equazione :

$$t = \frac{\tau}{\xi} x + t_0 \text{ dando origine ad un cono degli eventi ampio } 2\frac{\xi}{\tau}, \text{ dove } \frac{\xi}{\tau} \text{ è la massima velocità ammessa dal grigliato.}$$

Nella realtà, essendo la velocità dell'onda pari a γ , il cono risulta ampio $2\gamma t_0$. E' quindi immediato realizzare che la condizione da imporre per far sì che l'equazione 3.7) dia una soluzione effettivamente rappresentativa della 3.6) deve essere :

$$\frac{\xi}{\tau} \geq \gamma \quad (3.8)$$

ossia la velocità con cui si muove il fenomeno che vogliamo studiare deve essere minore di quella massima ammessa dal grigliato, per evitare problemi di instabilità numerica.

In particolare tale condizione implica che la distanza di griglia non deve essere inferiore a quella che un'onda con velocità γ può attraversare in uno step temporale. Se così fosse anche piccoli errori di osservazione o di arrotondamento verrebbero amplificati durante la soluzione iterativa delle 3.5) fino a mascherare la soluzione reale. La 3.8) è nota come condizione di Courant - Friedrich - Lewy.

La soluzione di questi problemi si è avuta qualche decennio dopo, intorno agli anni '50, quando l'introduzione della vorticità e del conseguente teorema ad essa legato risolsero il problema della compensazione dei termini nell'equazione del moto.

Per ciò che riguarda l'instabilità numerica, sempre in quel periodo Charney dimostrò (1948) che per risolvere le equazioni generali 3.5) con valori di d e Δt ragionevoli (preclusi dal criterio CFL quando si hanno onde veloci) era sufficiente usare in modo appropriato le condizioni di geostroficità e di idrostaticità. In questo modo vennero gettate le basi dell'approssimazione quasi geostrofica.

4 - Approssimazione quasi - geostrofica

4.1 - Introduzione

Uno degli scopi fondamentali della meteorologia sinottica consiste nella valutazione dei moti verticali, importanti non solo per essere la causa di nubi e precipitazioni ma anche per il legame che presentano con i profili verticali di convergenza e divergenza, associati con i processi di ciclogenese.

Sappiamo dalla teoria che l'equazione di continuità, a causa dell'idrostaticità dell'atmosfera a scala sinottica, non permette di valutare accuratamente il campo verticale del moto. Inoltre sarebbe opportuno poter misurare questa quantità mettendola in relazione con la tendenza superficiale di pressione $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)$ e le equazioni del moto, in modo da completare i processi che governano il comportamento dei disturbi sinottici.

La grandezza che introdurremo, la vorticità, rappresenta una proprietà fondamentale dei fluidi, la loro rotazione. La pratica quotidiana mostra come sia i cicloni che gli anticicloni si muovano e prendano origine proprio dal moto ondulatorio delle correnti aeree. La nascita e l'esaurimento di questi sistemi sono molto ben rappresentate dalle variazioni di vorticità nel fluido.

In un sistema quasi - geostrofico le variazioni di vorticità superficiale sono legate direttamente a quelle della pressione superficiale e sono ricavabili attraverso le avvezioni di temperatura e vorticità ai livelli superiori.

In questo capitolo, dopo aver introdotto la vorticità, ne evidenzieremo gli aspetti pratici, legandola alle caratteristiche principali che possono osservarsi sulle carte del tempo e ai moti verticali.

4.2 - Vorticità e circolazione

In termini rotatori sono due le grandezze che contraddistinguono un fluido : la circolazione e la vorticità. La circolazione è una misura macroscopica della rotazione ed è definita come :

$$C = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{fig. 17}) \quad (4.1)$$

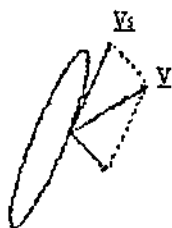


fig.17)

Essendo sia v_s che ds funzione del tempo sarà più utile valutare la variazione temporale della circolazione :

$$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{dv_s}{dt} ds + \oint v_s \frac{d(ds)}{dt} = \oint a_s ds + \oint v_s dv_s \quad (4.2)$$

Il I° termine a II° membro è nullo in quanto integrale ciclico di un differenziale esatto, il I° termine è invece l'accelerazione lungo la curva. Pertanto affinché abbia luogo una circolazione, ovvero se ne evolva una è necessario che

le accelerazioni che si producono nei moti delle correnti aeree siano causati da forze non conservative. In questo modo l'integrale ciclico al II° membro della 4.2) sarà sicuramente diverso da zero.

Tra le forze presenti quella che senz'altro ha i suddetti requisiti è il gradiente di pressione; supponendo per semplicità che essa sia l'unica forza presente otterremo:

$$\frac{dC}{dt} = - \oint \frac{1}{\rho} \frac{dp_s}{ds} ds = - \oint \frac{1}{\rho} dp \quad (4.3)$$

Tale integrale può essere nullo solo se l'atmosfera è in equilibrio, ossia se è barotropica (superfici isobariche ed isosteriche parallele), mentre sarà sicuramente diverso da zero in condizioni barocline, laddove cioè le superfici isobariche ed isosteriche s'intersecano dando luogo a linee chiuse che prendono il nome di solenoidi isobarici - isosterici (fig 18a).

Pertanto in virtù del ragionamento anzidetto, la causa prima della formazione di una circolazione è l'esistenza di uno stato baroclinico dell'atmosfera. In particolare è possibile ricavare (ma lo lasceremo al lettore come ricerca) il teorema di Bjerknes sulla circolazione, in base al quale la variazione lagrangiana nel tempo della circolazione atmosferica, valutata lungo una curva chiusa è numericamente uguale alla quantità di solenoidi unitari compresi nella porzione di atmosfera delimitata da detta curva.

L'altra grandezza che definiremo è la vorticità, che caratterizza una rotazione dal punto di vista microscopico ed è matematicamente esprimibile nel modo seguente:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.4)$$

Ogni componente descrive la rotazione di una particella d'aria in un piano ortogonale a quello individuato dal versore della componente. Tra le tre la più importante è la terza, che esprime la rotazione attorno ad un asse verticale ed è legata allo sviluppo dei cicloni e degli anticicloni, legarne espresso dalla teoria quasi - geostrofica.

Da un punto di vista matematico si può facilmente ricavare:

$$\xi = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{V} d\mathbf{l}}{A} \quad (4.5)$$

dalla quale si ha una conferma diretta del fatto fisico che la differenza tra circolazione e vorticità nell'identificare una rotazione è solo nel punto di vista rispetto al quale la si considera.

Il significato fisico della vorticità può essere oltremodo chiarito osservando la figura 18b. Per convenzione nell'Emisfero Nord considereremo la vorticità positiva per rotazioni antiorarie (cicloniche) e negativa per rotazioni orarie (anticicloniche).

In generale un fluido può sperimentare l'insorgere della vorticità in due modi, e precisamente in un moto su traiettoria curvilinea, o durante un moto rettilineo in presenza di uno shear nel campo del vento oppure attraverso una combinazione delle due cause.

Un modo particolarmente efficace, da questo punto di vista, per esprimere la vorticità è attraverso le coordinate naturali:

$$\xi = - \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{R} \quad (4.6)$$

In base alle convenzioni adottate considereremo $R > 0$ per curvatura ciclonica ed $n > 0$ alla sinistra del moto (es. n° 15).

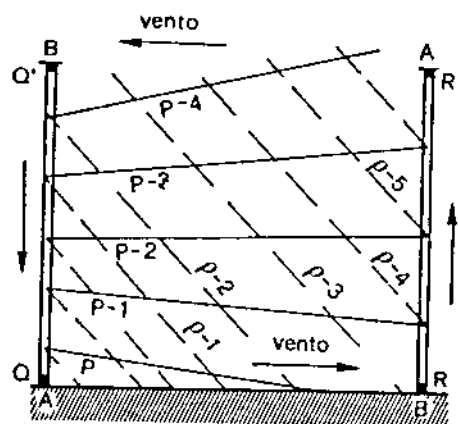


Fig. 12a - Atmosfera baroclina tra superfici di ugual densità e quelle di ugual pressione sono fra loro inclinate.

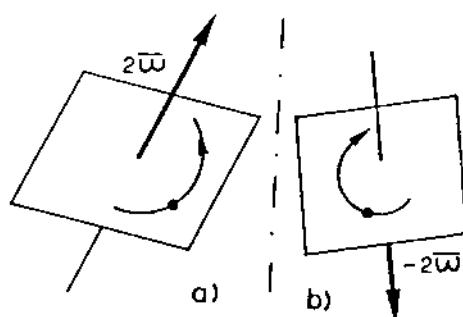


Fig. 12b - Vorticità ciclonica a); anticiclonica b).

Dopo questa descrizione degli aspetti salienti della rotazione di un fluido e della sua vorticità trasferiamoci sulla superficie terrestre. Su di essa c'è un elemento che complica un po' le cose, la rotazione terrestre. In realtà però, come vedremo immediatamente, questa è solo una complicazione apparente in quanto si può facilmente risolvere introducendo il concetto di vorticità assoluta.

Infatti a causa della rotazione terrestre, la verticale locale avrà un moto rotatorio attorno al Polo Nord con velocità angolare sempre più bassa man mano che ci si avvicina all'equatore. In formule possiamo scrivere :

$$f = 2\Omega \sin \varphi \quad (4.7)$$

φ : latitudine dell'osservatore; f : parametro di Coriolis o vorticità planetaria

In questo modo la vorticità assoluta di una particella in moto nell'atmosfera terrestre, valutata cioè rispetto alle stelle fisse viene ad essere :

$$\xi_a = \xi + f \quad (4.8)$$

Per comprendere appieno la potenzialità di questa nuova grandezza, consideriamo un esempio, molto semplice ma non per questo meno significativo.

Consideriamo una particella d'aria in moto adiabatico; in un caso del genere essa si muoverà su una superficie caratterizzata da $\vartheta = \text{cost.}$ e per la quale potremo scrivere :

$$\rho \propto p^{c_p/c_v} \quad (4.9)$$

che esprime la dipendenza della densità dalla sola pressione lungo una superficie isentropica ($\vartheta = \text{cost.}$), per cui ricordando la 4.3) si ottiene :

$$\frac{dC}{dt} = -\oint \frac{dp}{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}(C + 2\Omega \sin \varphi) = 0 \quad (4.10)$$

A questo punto ricordando la relazione tra circolazione e vorticità si ricava :

$$A(\xi + f) = \text{cost.} \quad (4.11)$$

Supponendo che la superficie su cui si muove la particella sia racchiusa tra le superfici ϑ_0 e $\vartheta_0 + d\vartheta_0$, separate dalla distanza dp , e sapendo che $M = \left(\frac{A\delta p}{g} \right) = \text{cost.}$ (per la conservazione della massa) possiamo scrivere :

$$A = \frac{\text{cost.}}{\delta p} = \text{cost.} \cdot \frac{\delta \vartheta}{\delta p} \quad (4.12)$$

dato che $\delta \vartheta = \text{cost.}$

Sostituendo la 4.12) nella 4.11) e facendo il limite per $\delta p \rightarrow 0$ otteniamo :

$$(\xi + f) \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \text{cost.} \quad (4.13)$$

che esprime la conservazione della vorticità potenziale in un moto adiabatico senza attrito; in particolare per un fluido incompressibile è possibile scrivere :

$$\frac{(\xi + f)}{dz} = \text{cost.} \quad (4.14)$$

Questa relazione influenza in modo determinante i moti a grande scala come può essere dimostrato considerando un flusso zonale $W \Rightarrow E$ sopra una catena montuosa di una massa d'aria con vorticità relativa iniziale nulla.

Sopra la catena montuosa il restringimento delle isoentropiche, particolarmente sensibile negli strati inferiori della colonna, causa una diminuzione del δZ . Avendo a che fare con un flusso zonale $f = 0$ e quindi per la 4.14) deve aversi una diminuzione di ξ ($\xi < 0$). In questo modo la massa d'aria inizierà a ruotare in senso anticiclonico (orario),

portandosi più a Sud, così, a valle della catena corrispondentemente ad un aumento del δz , che tenderà a riportarsi alle condizioni iniziali, avremo una diminuzione di f (la massa d'aria è più a Sud) e quindi ξ dovrà aumentare fino a diventare positiva (ciclonica). In altre parole si genera la situazione descritta in fig. 19 :

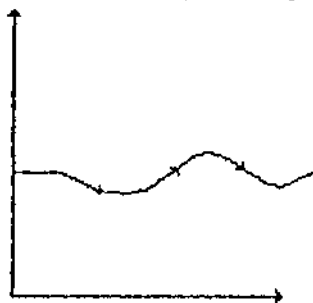


fig.19)

caratterizzata da una depressione sottovento ed una serie di piccole oscillazioni.

Questo fenomeno è una delle concause prevalenti nella formazione delle depressioni sottovento e del rinvigorismento degli anticicloni in presenza di catene montuose, fenomeni facilmente verificabili nella quotidiana evoluzione dello stato del tempo.

Dopo questa breve digressione, peraltro utile, per proporre allo studente il legame tra formulazioni matematiche apparentemente fredde ed astratte e la pratica quotidiana, ed incoraggiarlo a ricercare sempre questo tipo di legame, vediamo dal punto di vista matematico a cosa ha portato l'introduzione della vorticità.

4.3 - Equazione della vorticità

Consideriamo le equazioni per le componenti del moto, scritte in forma esplicita, e deriviamo la componente u rispetto ad y e la v rispetto ad x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se sottraiamo membro a membro la 1^a equazione dalla 2^a otteniamo :

$$\frac{d}{dt} (\xi + f) + (\xi + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (4.16)$$

tenendo conto dell'invarianza di f rispetto ad x, y, z e t .

La 4.16) esprime la variazione lagrangiana di vorticità in funzione di tre effetti dominanti : divergenza del vento, termine dei tubi di vortice, termine solenoidale.

Vediamo in dettaglio cosa esprime ciascuno di essi :

a) Il termine della divergenza e la variazione di vorticità assoluta sono legati tra loro da un concetto analogo a quello che lega variazioni di velocità angolare e momento d'inerzia in regime di conservazione del momento della quantità di moto. Nel caso in questione deve essere conservata la circolazione; tenendo presente che questa va valutata lungo una linea chiusa, un aumento di divergenza tenderà a far aumentare la superficie racchiusa da detta linea e quindi, per conservare C , ξ dovrà diminuire (vedi 4.4).

b) Il termine dei tubi di vortice non esprime altro che un trasferimento di vorticità da un piano ad un altro; consideriamo ad esempio la seguente figura :

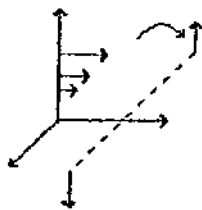


fig. 20)

In questo esempio siamo con una condizione iniziale di vorticità anticiclonica sul piano xz prodotta dallo shear della componente u lungo z. A causa dell'asimmetria di w lungo y, questa rotazione tenderà a trasferirsi lungo yz, mantenendo sempre carattere anticiclonico.

c) Per quel che riguarda invece il termine dei solenoidi, questi è un termine baroclinico, dovuto ai gradienti termici e barici e rappresenta l'equivalente microscopico del II° membro della 4.2).

Per dimostrarlo applichiamo ad esso il teorema di Stokes :

$$\oint \alpha dp = - \oint \alpha \nabla p \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{\sigma} \nabla \wedge (\alpha \nabla p) \cdot \mathbf{k} d\sigma \quad (4.17)$$

dove σ è l'area orizzontale delimitata dalla curva l. Manipolando opportunamente la 4.17) otterremo :

$$- \oint \alpha dp = - \iint_{\sigma} (\nabla \alpha \wedge \nabla p) \cdot \mathbf{k} d\sigma \quad (4.18)$$

A questo punto, osservando che il termine dei solenoidi nella 4.16) non è altro che :

$$- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = - \mathbf{k} \cdot (\nabla \alpha \wedge \nabla p) \quad (4.19)$$

Abbiamo così ottenuto, come si vede confrontando il risultato col II° membro della 4.18), proprio quell che volevamo dimostrare, ossia che tra termine solenoidale della 4.16) e quello della 4.5) c'è lo stesso legame che esiste tra circolazione e vorticità. In questo modo valgono per la vorticità tutte le considerazioni fatte a suo tempo per la circolazione, relativamente agli effetti di questo termine.

Volendo considerare il punto di vista euleriano, dobbiamo aggiungere ai termini a II° membro sopra discussi anche l'avvezione di vorticità: $-\mathbf{v} \nabla (\xi + f)$, termine non lineare che esprime il trasporto di vorticità operato dal campo del vento e si discute in modo analogo agli altri termini avvevativi già incontrati.

$$\frac{\partial (\xi + f)}{\partial t} = - \mathbf{v} \nabla (\xi + f) - (\xi + f) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (4.20)$$

Andiamo ora a vedere da vicino il reale contributo di ciascuno di questi termini, effettuando l'analisi di scala della 4.20), tenendo presente i valori di scala assunti come riferimento per la scala sinottica :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &\Rightarrow \frac{U^2}{L^2} \approx 10^{-10} s^{-2} & w \frac{\partial \xi}{\partial z} &\Rightarrow \frac{WU}{LH} \approx 10^{-11} s^{-2} \\ \xi &\Rightarrow \frac{U}{L} \approx 10^{-5} s^{-1} & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} &\Rightarrow \frac{WU}{LH} \approx 10^{-11} s^{-2} \\ u \frac{\partial \xi}{\partial x} &\Rightarrow \frac{U^2}{L^2} \approx 10^{-10} s^{-2} & \xi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &\Rightarrow \frac{U^2}{L^2} \approx 10^{-10} s^{-2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} \Rightarrow \frac{\delta \rho \delta \rho}{\rho^2 L^2} \approx 10^{-11} s^{-2} \quad f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{U^2}{L^2} \approx 10^{-9} s^{-2}$$

$$v \frac{df}{dy} \Rightarrow \frac{Uf}{L} \approx 10^{-10} s^{-2} \quad \frac{df}{dy} = \beta \approx 10^{-11} ms^{-1}$$

Osserviamo però un'incongruenza dovuta alla stima troppo rozza della divergenza. Infatti i risultati ottenuti mostrano che il termine di divergenza è l'unico che ha un ordine di grandezza più elevato rispetto agli altri; ciò significa che se le cose fossero realmente queste l'equazione 4.20) non potrebbe essere soddisfatta. In realtà la natura ha regolato le cose in modo tale che la divergenza lungo x e quella lungo y tendono a compensarsi, facendo sì che risulti:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \leq 10^{-6} s^{-1} \text{ che moltiplicato per } f \Rightarrow f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \leq 10^{-10} s^{-2}$$

coerentemente con gli altri ordini di grandezza.

A questo punto mantenendo i soli termini di ordine 10^{-10} possiamo scrivere:

$$\left(\frac{dh}{dt} \right) (\xi + f) = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad 4.21)$$

$$\text{dove } \frac{dh}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

La 4.21) afferma che a scala sinottica, in prima approssimazione, la variazione lagrangiana di vorticità assoluta è interamente dovuta ad effetti di divergenza. Tale assunto cade di validità in prossimità dei fronti atmosferici, in corrispondenza dei quali L può arrivare a $10^4 - 10^5$ m, causando un incremento anche degli altri termini, che rientrano in gioco e vanno pertanto considerati.

Un modo più semplice e pratico di scrivere la 4.20) si ha utilizzando le coordinate x, y, p:

$$\frac{\partial(\xi + f)}{\partial t} = -v \nabla_h (\xi + f) - \omega \frac{\partial \xi}{\partial p} - (\xi + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \quad 4.22)$$

per la quale valgono le stesse considerazioni della 4.16); la sola differenza è nella scomparsa del termine dei solenoidi.

La prima cosa che possiamo fare con la 4.22) è di ricavare un'approssimazione molto utile per scopi pratici, la cosiddetta approssimazione del livello medio. Consideriamo l'equazione di continuità espressa nel sistema x, y, p

$$\Rightarrow \nabla_h V_h = - \frac{\partial \omega}{\partial p} \text{ che integrata tra due livelli } p_1 \text{ e } p_0 \text{ fornisce:}$$

$$(p_1 - p_0) \cdot \overline{\nabla_h V_h} = -(\omega_1 - \omega_0) \quad 4.23)$$

ponendo $p_1 = 0$, $p_0 = 1000$ mb e $\omega_1 = 0$ otteniamo:

$$\overline{\nabla_h V_h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx 10^{-6} s^{-1} \Rightarrow \text{esisteranno dei livelli in corrispondenza dei quali la divergenza deve essere}$$

negativa, per far sì che la media sia di un ordine di grandezza in meno, ma ciò vuol dire che dovrà anche esserci un livello in corrispondenza del quale essa si annulli. Sperimentalmente questo livello coincide con buona approssimazione col livello isobarico 500mb.

Pertanto in corrispondenza di esso si avrà $\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$ e la 4.22), tenendo conto dell'analisi di scala, potrà scriversi come :

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (\xi + f) \right|_{500mb} = -V_h \nabla_h (\xi + f) \Big|_{500mb} \quad 4.24)$$

A questo punto si può utilizzare un concetto familiare, già discusso ed analizzato in modo approfondito, quello di vento geostrofico. In altre parole quello che si fa in pratica è approssimare il termine V_h che compare nel termine avvetivo, col vento geostrofico, ipotesi lecita ed attendibile almeno al 1° ordine, e la vorticità relativa con il suo valore geostrofico.

A questo punto la 4.24) può riscriversi :

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{500mb} = - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial (\xi + f)}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial (\xi + f)}{\partial y} \right) \Big|_{500mb} \Rightarrow \text{che in forma compatta si riduce a :}$$

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{500mb} = -J(z, (\xi + f)) \Big|_{500mb} \quad 4.25)$$

dove J sta ad indicare il determinante Jacobiano.

La 4.25) è nota col nome di equazione di Von Neumann e consente di prevedere le variazioni locali dell'alteza del livello isobarico 500mb, note le condizioni iniziali ad un tempo $t_0(\xi, f, z)$, in modo iterativo, utilizzando il cosiddetto metodo della "Relaxation" per l'inversione del laplaciano (es.17).

Rimane in tema di esercizi, per quel che riguarda la vorticità si consigliano anche il punto b) dell'esercizio n°14, relativo alla vorticità geostrofica, ed il n°16), inerente al calcolo pratico della vorticità geostrofica su mappa meteorologica.

Dopo questa utile parentesi, ripartiamo dalla 4.22), dopo aver fatto però le seguenti considerazioni :

- a) Trascuriamo i termini meno significativi (come emerge dall'analisi di scala)
- b) Introduciamo la vorticità geostrofica
- c) Sostituiamo, nel termine avvetivo, il vento reale col vento geostrofico

d) Facciamo la cosiddetta approssimazione del piano β che consiste nel sostituire f_0 al posto di f e $\beta = \left(\frac{df}{dy} \right)_{\phi_0}$ al posto di $\frac{df}{dy}$; f_0 deriva dall'aver sviluppato in serie f intorno ad una latitudine ϕ_0 intermedia, in particolare si osserva che per moti aventi scala latitudinale $\ll$ del raggio terrestre f coincide con f_0 ad eccezione dei termini di derivazione $\left(\frac{df}{dy} \right)$ che vengono quindi approssimati con $\beta = \left(\frac{df}{dy} \right)_{\phi_0}$.

Applicando queste ipotesi alla 4.22) otteniamo :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -V_g \nabla (\xi_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad 4.26)$$

nota col nome di approssimazione quasi - geostrofica.

Quest'equazione è molto importante in quanto, comparando il vento geostrofico, filtra le onde acustiche e di gravità, dato che non permette di considerare moti che viaggiano a velocità superiore a quella geostrofica. Inoltre aver imposto l'equilibrio geostrofico sul campo del vento fa sì che la vorticità e la temperatura siano legate tra loro attraverso il

geopotenziale. Infatti la 4.26) non ha che due incognite (ξ_g, ω) , e ciò snellisce molto il problema da un punto di vista matematico, pur senza ridurlo fisicamente.

Abbiamo visto quindi il passo avanti compiuto dalla teoria dall'epoca del fallimento di Richardson e come ci si sia resi conto dell'importanza di trovare altre equazioni "filtranti", da accoppiare all'equazione idrostatica, che da sola non era sufficiente.

A questo punto tutto è pronto per definire il sistema di equazioni quasi - geostrofico, che come vedremo presenta notevoli vantaggi prognostici rispetto al sistema di equazioni tradizionale.

4.3 - Sistema di equazioni quasi - geostrofico

Per ottenere le equazioni che descrivono un sistema quasi - geostrofico bisogna ricavare un'altra equazione da abbinare alla 4.26) in modo da ottenere un sistema 2×2 risolubile senza troppe difficoltà.

A tale scopo verrà utilizzato il I° principio della Termodinamica, scritto però in termini di z , eliminando cioè T servendosi della condizione di idrostaticità.

Partiremo dalla temperatura potenziale riscritta servendosi della legge dei gas perfetti:

$$\theta = \frac{p\alpha}{R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad 4.27)$$

facendo il logaritmo naturale della 4.27) si ottiene:

$$\ln \theta = \ln \alpha - \left(\frac{R}{c_p} - 1 \right) \ln p + \text{cost.} \quad 4.28)$$

La 4.28) così com'è però mi dice ancora poco; per arrivare ad una formulazione più utile ed immediata si introduce il sistema di coordinate x, y, p e si va a derivare in modo lagrangiano la 4.28) rispetto a t .

Così facendo, dopo aver svolto i calcoli si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-g \frac{\partial z}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(-g \frac{\partial z}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(-g \frac{\partial z}{\partial p} \right) - \sigma \omega = \frac{\alpha}{c_p} \frac{dQ}{dt} \quad 4.29)$$

dove sono state utilizzate le seguenti posizioni:

b) $\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}$ (Equazione termodinamica dell'energia scritta in forma entropica; $\frac{dQ}{dt}$ esprime il contributo

dei termini diabatici, dato che per un'atmosfera adiabatica $\theta = \text{cost.}$)

c) $\alpha = -g \frac{\partial z}{\partial p}$ (Equazione dell'idrostatica)

d) $\sigma = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ (Parametro di stabilità statica; per atmosfera stabile $\sigma > 0$)

A questo punto la 4.29) può ulteriormente semplificarsi introducendo al posto del vento orizzontale il suo valore geostrofico ed ipotizzando che gli scambi diabatici di calore siano piccoli rispetto ai termini a I° membro:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla_h \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega \quad 4.30)$$

Fisicamente $-\frac{\partial \phi}{\partial p}$ è la temperatura della superficie isobarica, visto che per un'atmosfera idrostatica vale la seguente relazione: $-\frac{\partial \phi}{\partial p} = \frac{1}{\rho}$. Pertanto il termine a I° membro esprime la variazione locale di temperatura su una superficie isobarica.

Il I° termine a II° membro quindi non sarà altro che l'avvezione di temperatura operata dal vento geostrofico, sempre su una superficie isobarica. L'ultimo termine infine esprime le variazioni di temperatura adiabatiche dovute ai moti verticali della massa d'aria in un ambiente stabile. Facciamo osservare che la 4.30) ha solo apparentemente tre incognite (ϕ, σ, ω), in quanto si può dimostrare che σ può essere espressa in funzione di ϕ .

A questo punto quindi la 4.24) e la 4.30) definiscono il sistema due per due dal quale partiremo per ricavare le equazioni del sistema quasi-geostrofico.

4.4 - Equazione delle tendenze

Definiamo una nuova variabile, la tendenza del geopotenziale:

$$\chi = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad 4.31)$$

In questo modo la 4.24) e la 4.30) possiamo esprimerle in termini di χ nel modo seguente:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -V_g \nabla_h \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \sigma \omega \quad 4.32)$$

$$\nabla^2 \chi = -f_0 V_g \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad 4.33)$$

dove si è utilizzata la definizione di vorticità geostrofica

$$\xi_g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi$$

Se ora moltiplichiamo la 4.32) per $\frac{f_0^2}{\sigma}$ e la differenziamo rispetto a p , sommando il risultato ottenuto alla 4.33), otteniamo:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi = -f_0 V_g \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(-V_g \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad 4.34)$$

dove si è ipotizzato σ costante: in realtà questa assunzione non sempre è verificata in senso stretto nella troposfera, mediamente però possiamo prenderla per buona.

A questo punto vediamo di comprendere bene il significato fisico di ciascun termine presente nella 4.34), che è la prima equazione del moto cercata e che va sotto il nome di equazione delle tendenze ed è tra l'altro un'equazione prognostica nel geopotenziale ($\chi = \frac{\partial \phi}{\partial t}$).

a) Il primo termine a I° membro non è altro che un termine proporzionale a $-\chi$. Per dimostrare questo basta supporre una χ di tipo ondulatorio (sinusoidale o cosinusoidale in x ed y) ed andare a sviluppare il ∇^2 . Discorso analogo vale per il termine $\frac{\partial^2 \chi}{\partial p^2}$, che supponendo l'altezza di scala dei moti sinottici a media latitudine pari ad H (altezza di scala della troposfera) può esplicitarsi come:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial p^2} = \left(-\frac{\pi}{p_0} \right)^2 \chi, \text{ risultando così anch'esso proporzionale a } -\chi.$$

I due termini a II° membro sono invece i due forzanti, relativi rispettivamente all'avvezione di vorticità geostrofica e di temperatura, con la differenza che quest'ultima viene differenziata lungo p . Vediamo di discuterli un pochino più in dettaglio.

b) Consideriamo il termine che esprime l'avvezione di vorticità e separiamolo nelle sue due parti costituenti per poterlo meglio interpretare fisicamente:

Tali termini sono $V_g \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi \right)$ e $V_g \frac{\partial f}{\partial y}$ che rappresentano rispettivamente l'avvezione di vorticità relativa e planetaria.

Per disturbi zonali occidentali ($W \rightarrow E$) questi due effetti tendono ad opporsi dando luogo a fenomeni diversi. Consideriamo come esempio un disturbo a 500 mb:

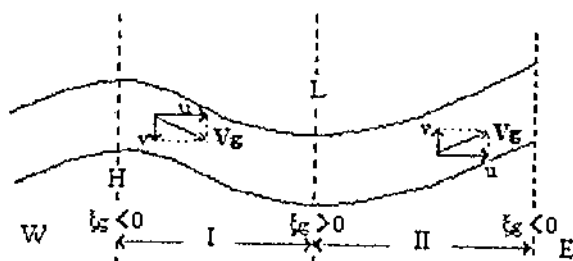


fig.21)

Regione I: $V_g \nabla \xi_g > 0$; $V_g \frac{\partial f}{\partial y} < 0$

Regione II: $V_g \nabla \xi_g < 0$; $V_g \frac{\partial f}{\partial y} > 0$

Ciò vuol dire che mentre l'avvezione di vorticità relativa tenderebbe a spostare l'onda verso Est, l'avvezione di vorticità planetaria tenderebbe a trascinarla indietro (contro corrente) facendole assumere moto retrogrado.

In realtà per le scale alle quali ci troviamo $L_x \approx 10^3 \text{ Km}$ prevale l'avvezione di vorticità relativa e quindi l'onda va verso Est facendo sì che con avvezione positiva (negativa) si abbia una diminuzione (aumento) del geopotenziale. Le onde caratterizzate da lunghezze di scala superiori ($L_x \geq 10^4$) tenderebbero ad essere retrograde anche se poi nella pratica la maggior parte di esse sono più o meno stazionarie a causa degli effetti topografici e dei contrasti termici presenti in superficie.

c) L'ultimo termine è il meno banale di tutti da studiare. Vediamo se riusciamo ad illustrarlo con un esempio:

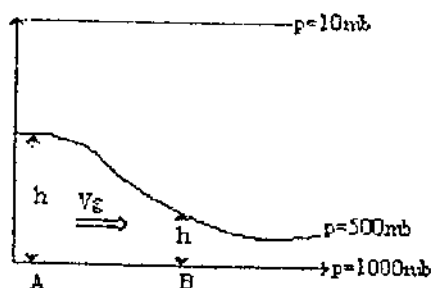


fig.22)

In figura abbiamo considerato il geopotenziale relativo a tre livelli isobarici : 10mb, 500mb e 1000mb, ipotizzando per semplicità che l'unico a variare il proprio geopotenziale sia il 500mb, ponendo come condizioni al contorno :

$$\chi(10\text{mb}) = 0 \text{ e } \chi(1000\text{mb}) = 0.$$

Dalla figura risulta che in corrispondenza del punto B si ha $-\frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] < 0$ e quindi ricordando che il primo membro va come $-\chi$, il risultato che si ottiene è una tendenza positiva, il geopotenziale cioè tenderà ad aumentare sulla verticale del punto B. Come regola generale potremmo dire che un'avvezione calda decrescente con la quota o una fredda crescente con essa causano un aumento di geopotenziale, viceversa un'avvezione fredda decrescente o una calda crescente con la quota ne causano una diminuzione.

Questo effetto è responsabile nella pratica quotidiana dell'instaurarsi di una configurazione ciclonica classica, nella quale le avvezioni calda e fredda presenti rispettivamente nelle vicinanze della cresta e del cavo dell'onda a 500mb sono molto marcate nei bassi strati, con la tendenza a diminuire lungo la verticale, avendo come effetto quello di intensificare ancor più il processo. Tale processo è fondamentale in quanto in assenza di fenomeni diabatici è il solo in grado di permettere l'intensificazione di un sistema sinottico a media latitudine attraverso processi baroclini.

4.5 - Equazione delle omega

Per ricavare l'equazione delle tendenze non è stato fatto altro che accoppiare le equazioni 4.32) - 4.33) eliminando ω . Ora faremo esattamente la stessa cosa eliminando però χ stavolta, derivando la 4.32) rispetto a p , facendo il laplaciano della 4.33) e sottraendo infine la prima dalla seconda; alla fine di tutti i conti si ottiene :

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(-\mathbf{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad 4.35)$$

La 4.35) a differenza della 4.34) è un'equazione diagnostica che permette di determinare il campo di velocità verticale in termini di ϕ , noto a priori o ricavato a partire dalla 4.34). La particolarità di questa equazione e ciò che ne fa uno strumento utile a livello pratico è il fatto di non dipendere da misure di vento orizzontale, difetto che aveva reso inadeguata l'equazione di continuità ai fini della valutazione delle correnti verticali.

Come per la 4.34) anche per la 4.35) andremo a fare uno studio termine per termine al fine di comprendere appieno il significato fisico di ciascuno di essi :

a) Il termine a I° membro, analogamente a quanto già fatto per il corrispondente della 4.34), è proporzionale a $-\omega$, e precisamente :

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega \approx \left[-(k^2 + l^2) - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{f_0 \pi}{p_0} \right)^2 \right] \omega$$

b) Il I° termine a II° membro è l'analogo fisico dell'ultimo termine della 4.34), con la differenza che esprime la variazione con la quota dell'avvezione di vorticità assoluta. Per comprenderne il significato fisico esaminiamo un caso tipico nella formazione di zone cicloniche ed anticicloniche :

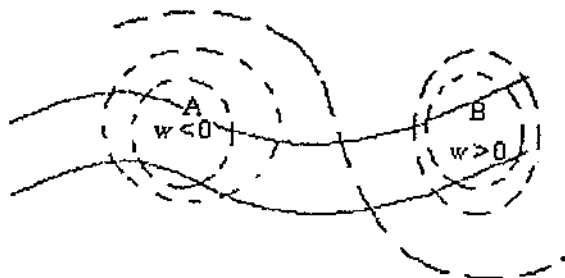


fig. 22)

La situazione illustrata in figura è caratteristica del processo suddetto; in particolare la formazione di aree cicloniche ed anticicloniche è associata rispettivamente ad una zona di convergenza e divergenza in quota (tra i 300 ed i 500mb).

Considerando l'onda della figura come caso tipico di disturbo ad alta quota, la zona di convergenza è sempre posizionata ad Est del cavo d'onda ed in posizione intermedia tra questi ed il successivo picco, mentre la zona di divergenza è in posizione opposta, ad Ovest del cavo, e leggermente in basso, più vicino al cavo rispetto alla zona di convergenza. Queste condizioni sono quasi sempre di entità tale da dar luogo al suolo ad un'alta ed una bassa pressione (linee tratteggiate in figura).

Applicando il termine che stiamo studiando alla situazione in figura, risulta che l'avvezione di vorticità positiva ha un massimo sopra la zona di bassa, viceversa quella di vorticità negativa ha un massimo nei pressi della zona di alta; dato che al suolo (1000mb), al centro delle rispettive zone difficilmente avremo grandi valori di avvezione di vorticità, la situazione che si genera è la seguente :

$$\frac{\partial}{\partial p} [V_g \nabla (\xi_g + f)] \begin{cases} > 0 \text{ sulla verticale di A} \\ < 0 \text{ sulla verticale di B} \end{cases}$$

avendo supposto di considerare un'onda tipica della scala sinottica ($L \approx 10^3$ Km) per la quale $\xi_g > f$.

Pertanto l'effetto del gradiente verticale di avvezione di vorticità è in generale quello di avere $\omega > 0$ (subsidenza) sopra le zone di alta pressione e $\omega < 0$ (moto ascendente) sopra le zone di bassa pressione. Se ci riflettiamo un attimo questo campo di velocità verticale è proprio quello richiesto per far sì che la tendenza del geopotenziale sia quella effettivamente osservata in corrispondenza delle zone di alta e bassa pressione. Infatti se ricordiamo la 4.34), l'avvezione di vorticità positiva su B dava luogo ad una diminuzione di χ , e quindi ad un minore spessore tra i livelli 500 - 1000mb. A tale scopo è però necessario un raffreddamento dell'atmosfera che accompagni la diminuzione di spessore e dato che nel centro di bassa non ci sono avvezioni molto forti, l'unico modo per raffreddare l'atmosfera è attraverso il raffreddamento adiabatico causato da moto ascendente ($\omega < 0 \Leftrightarrow w > 0$).

Così facendo il moto verticale mantiene un campo di temperature idrostatico in presenza di avvezione di vorticità; senza di esso i cambi di vorticità a 500mb potrebbero non rimanere geostrofici o quelli di temperatura tra i livelli 500 e 1000mb non essere più idrostatici.

c) L'ultimo termine esprime l'avvezione di spessore (temperatura). In realtà per visualizzarlo meglio possiamo considerare :

$$\nabla^2 \left[V_g \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \propto -V_g \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad 4.36)$$

Questi fa sì che siamo in presenza di avvezione calda (fredda), l'effetto sul campo di velocità verticale è quello di generare moti ascendenti (discendenti). Pertanto applicando queste considerazioni alla figura precedente avremo moto ascendente ad Est del centro di bassa e moto discendente ad Ovest di esso, associati rispettivamente al fronte caldo e a quello freddo della perturbazione.

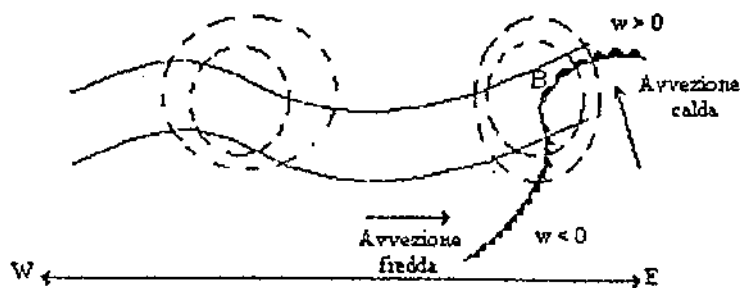


fig. 23)

Possiamo dimostrare che tale campo di velocità verticale come nel caso precedente era indispensabile per mantenere idrostatiche le variazioni di spessore e temperatura, in questo caso è utile a mantenere geostrofici i cambiamenti di vorticità in quota. L'avvezione calda al di sotto del picco a 500mb genera un aumento dello spessore 500 - 1000mb tendendo ad innalzare il geopotenziale del livello 500mb. In virtù dell'ipotesi di geostroficità ciò deve produrre un aumento di vorticità anticiclonica ($\xi_g < 0$), che non potendo venire tramite avvezione, dovrà essere fornito da un aumento di divergenza in quota, che in base alla 4.??) dà luogo alla diminuzione ulteriore di ξ_g che volevamo. La continuità di massa richiede però la presenza di un moto ascendente per compensare l'aumento di divergenza, che è proprio quello che abbiamo ottenuto dalla 4.36).

Abbiamo quindi visto l'importanza del sistema quasi - geostrofico nella sua totalità. Tale modello risulta valido per i sistemi a scala sinottica i quali soddisfano abbastanza da vicino alle ipotesi di geostroficità ed idrostaticità ed è anche non troppo complicato visto che è definito da due equazioni.

Non solo ma come abbiamo già detto l'ipotesi di idrostaticità filtra la propagazione delle onde acustiche lungo la verticale, mentre quella geostrofica fa sì che la propagazione di onde che viaggiano con $V > V_g$ (100m/s) non sia di fatto presente nelle equazioni, eliminando quindi le onde veloci (come quelle acustiche orizzontali e quelle di gravità), che sono quelle che poi generano i danni maggiori sull'attendibilità di una previsione, come il tentativo di Richardson ha dimostrato.

P A R T E I

Elementi di meteorologia dinamica

LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA METEOROLOGIA

L'atmosfera segue la terra nel suo moto di rotazione intorno al suo asse come un involucro gassoso che la circonda. Le equazioni del moto che si scriveranno per una massa d'aria nell'atmosfera dovranno dunque tenere conto del fatto che la atmosfera è un sistema ruotante, quindi non inerziale.

Consideriamo una massa d'aria unitaria, cioè con $m = 1$. Essendo:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{F}$$

quando scriveremo $\vec{a}$ intenderemo anche la forza specifica per unita' di massa.

Dalla meccanica sappiamo che:

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

dove $\vec{a}_0$ = accelerazione rispetto al sistema inerziale (assoluto), $\vec{a}_r$ = accelerazione rispetto al sistema non inerziale (relativo), $\vec{a}_t$ = accelerazione del sistema non inerziale rispetto a quello inerziale. Da notare che $\vec{a}_t$ assume forme differenti a seconda del riferimento non inerziale; per una terna cartesiana x, y, z ruotante intorno all'asse z , abbiamo:

$$(1) \quad \vec{a}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare della terra, $\vec{r}$ è il vettore che individua la massa di cui si vuole misurare l'accelerazione, $\vec{v}_r$ è la velocità della massa misurata rispetto al sistema ruotante.

La (1) diventa quindi:

$$(2) \quad \vec{a}_0 = \vec{a}_n + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\Omega} \times \vec{v}_n$$

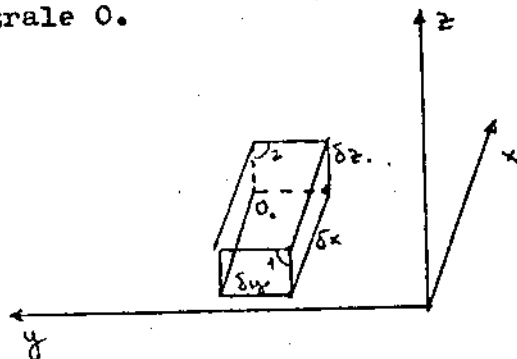
Passiamo ora all'analisi del termine $\vec{a}_0$; in esso dovrà comparire un termine dovuto all'accelerazione di gravità, uno dovuto alle forze di pressione sulla massa d'aria, ed un termine dovuto alle forze di attrito che si esercitano tra uno strato d'aria e l'altro. Esaminiamoli separatamente.

A) Dalla legge di gravitazione universale si ha:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}$$

nel nostro caso abbiamo: m_1 = massa della terra = M , m_2 = massa d'aria = 1 . Scriviamo quindi:

B) Forze di pressione: Consideriamo l'elemento di volume $\delta x \delta y \delta z$ immerso in un campo di pressione P . Siano p_1 e p_2 le pressioni che agiscono sulle facce 1 e 2. Sia P_0 la pressione sul punto centrale O .



La forza totale agente sull'elemento di volume nella direzione dell'asse x è data da:

$$p_1 \delta y \delta z - p_2 \delta y \delta z$$

Sviluppando ora p_1 e p_2 in serie di Taylor fermandosi al termine di primo grado si ha:

$$p_1 = p_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x$$

$$p_2 = p_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x$$

Allora la forza totale agente nella direzione dell'asse x sarà:

$$p_1 \delta y \delta z - p_2 \delta y \delta z = \left[p_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x - \left(p_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta V$$

Ricordando che $\delta V = \frac{1}{\rho}$, essendo $m = 1$ l'espressione precedente diventa:

$$p_1 \delta y \delta z - p_2 \delta y \delta z = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Estendendo il risultato alle altre facce dell'elemento di volume, la forza totale dovuta al campo di pressioni sarà:

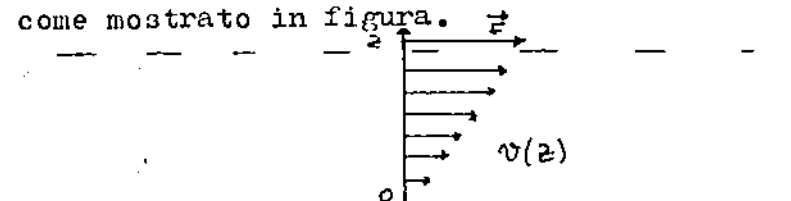
$$(3) \quad - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right) = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

C) Forze di attrito : Immaginiamo l'atmosfera suddivisa in strati liberi di scorrere l'uno sull'altro; siano essi soggetti solo a correnti orizzontali; la velocità avrà dunque le sole componenti:

$$\vec{v} = u \hat{i} + v \hat{j}$$

A scopo esemplificativo immaginiamo di stare nella seguente situazione: consideriamo degli strati d'aria estendentisi fino ad una certa quota z , ed immaginiamo che la superficie terrestre sia perfettamente liscia (vogliamo così eliminare l'effetto della rugosità del terreno che porterebbe un contributo vorticoso al moto degli strati; da notare che questa

approssimazione non e' sempre valida). Supponiamo inoltre che lo strato sia racchiuso alla quota z , da una placca orizzontale che agisce con una forza costante $\vec{F}$, parallela allo strato, come mostrato in figura.



In queste condizioni essa da' luogo ad un moto uniforme dello strato superiore con velocita' $\vec{v}$. Perche' cio' sia possibile, la forza motrice $\vec{F}$ deve essere equilibrata da una forza $\vec{\tau}$ detta di attrito, che agisce orizzontalmente; ha direzione opposta al moto ed impedisce ad ogni strato inferiore di avere la stessa velocita' dello strato superiore; essa e' proporzionale all'area della placca S , alla $\vec{v}$ ed inversamente proporzionale alla z . Potremo scrivere:

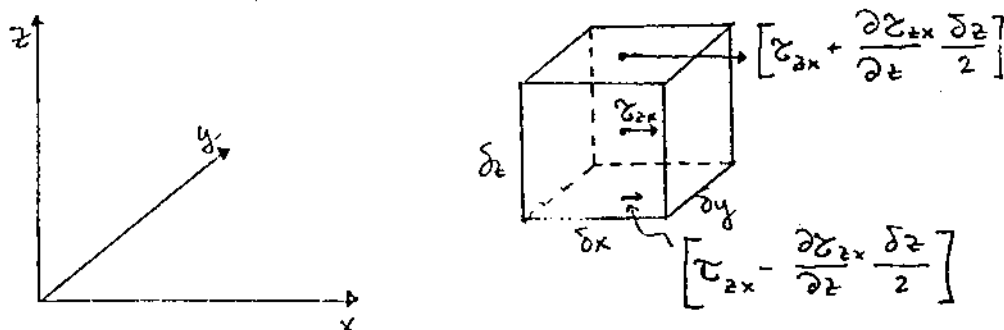
$$\vec{F} = \mu S \frac{\vec{v}}{z}$$

dove μ e' il coefficiente di viscosita' dinamica. Ogni strato fluido quindi esercitera' sullo strato sottostante la stessa forza, poiche' il moto e' uniforme. Andando al limite possiamo scrivere per unita' di area:

$$\vec{\tau} = \mu \frac{d\vec{v}}{dz}$$

μ per l'aria vale : $1.7 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$

Nel caso piu' generale di un moto non stazionario, possiamo calcolare la risultante della forza di attrito, considerando un elemento $\delta x \delta y \delta z$ di volume centrato in x_0, y_0, z_0 :



La risultante sara', moltiplicando per $\delta_y \delta_x$:

$$\begin{aligned} \delta_y \delta_x \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right) - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\partial z}{2} \right) \right] = \\ = \delta_y \delta_x \delta_z \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \delta V \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \end{aligned}$$

per unita' di massa:

$$(4) \quad \frac{F}{\delta m} = \frac{\delta V}{\delta m} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Tenendo conto delle 2,3,4 e dell'accelerazione di gravita', il secondo principio della dinamica si puo' scrivere:

$$(5) \quad -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} = \frac{d\vec{v}}{dt} + 2 \vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

La (5) puo' anche essere scritta:

$$(6) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2 \vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{g} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}$$

dove $\vec{g}$ qui rappresenta la risultante tra l'accelerazione di gravita' e quella centripeta.

E' facile intuire che questa equazione non e' sufficiente per poter risolvere il problema da noi preso in considerazione: definire il moto di una massa d'aria. L'equazione (6) e' funzione delle cinque variabili u, v, w, ρ, p . Abbiamo quindi un sistema in cinque variabili e tre equazioni, le tre equazioni

scelari in cui si scompone la (6), non risolvibile in maniera univoca. Prima di cercare altre relazioni che leghino queste variabili, conviene approfondire altri aspetti dell'equazione del moto.

Dalla (6) abbiamo

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} + f v - e w + \frac{1}{f} F_x \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{1}{f} F_y \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial z} + e u - g + \frac{1}{f} F_z \end{cases}$$

ricordiamo che il prodotto vettoriale $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ si ottiene calcolando il determinante

$$-2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \Omega \cos \varphi & \Omega \sin \varphi \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

dove $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono i versori degli assi x, y, z .

abbiamo posto inoltre:

$$\begin{aligned} 2\Omega \sin \varphi &= f & \vec{\Omega} &= (0, \Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi) \\ 2\Omega \cos \varphi &= e & \vec{v} &= (u, v, w) \end{aligned}$$

Il sistema (7) nella forma euleriana

Sappiamo dalla meccanica razionale che esistono due tipi di rappresentazioni per la descrizione del moto di un sistema continuo: quella lagrangiana o "degli osservatori mobili", quella euleriana o "degli osservatori fissi". Nella rappresentazione lagrangiana, usata nel sistema (7), abbiamo fatto uso della derivata totale di una grandezza; in quella

euleriana dobbiamo far uso della derivata locale, definita come:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v$$

il termine $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v$ è chiamato termine di avvezione. Da notare come in meteorologia sia preferibile la derivata locale a quella totale, in quanto i valori delle grandezze di interesse meteorologico vengono solitamente misurati mediante osservatori fissi. Introducendo questa rappresentazione il nostro sistema assume la forma:

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} + f v - e w + \frac{1}{f} F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{1}{f} F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} w - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial z} + e u + \frac{1}{f} F_z \end{cases}$$

Prendiamo il sistema espresso nella forma lagrangiana:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} + f v - e w + \frac{1}{f} F_x \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{1}{f} F_y \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial z} + e u - g + \frac{1}{f} F_z \end{cases}$$

Vogliamo effettuare delle approssimazioni basandoci sulla cosiddetta "analisi di scala".

Analisi di scala

L'analisi di scala è un metodo sistematico molto usato per paragonare l'ordine di grandezza dei vari termini che appaiono nelle equazioni del moto. Questa tecnica fu introdotta da J. Charney nel 1948 nello studio della dinamica meteorologica a grande scala. Vengono assegnate alle variabili fisiche i valori caratteristici seguenti:

L = scala orizzontale caratteristica (circa $1/4$ della lunghezza d'onda della perturbazione).

D = scala verticale caratteristica.

H = altezza di scala dell'atmosfera (di solito la troposfera)

V, W = velocità caratteristiche orizzontali e verticali.

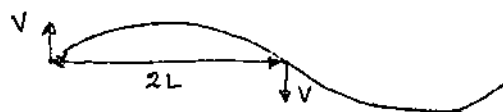
L/V = periodo caratteristico.

Si assumono come segue l'ordine di grandezza delle derivate:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V}{L}, \text{ ecc.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{V}{D}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{V}{L/V} = \frac{V^2}{L}$$

assumendo che in un quarto di lunghezza d'onda ($= L$), la variazione di V sia come mostrata in figura.



Vogliamo applicare l'analisi di scala per un sistema di moto di masse d'aria frequente alle nostre latitudini: il ciclone extra tropicale.

Sulla base dell'esperienza si possono assumere i seguenti valori delle grandezze meteorologiche che caratterizzano il suddetto tipo di sistema:

Velocita' verticale	$W = 10^{-2} \text{ m sec}^{-1}$
Velocita' orizzontale	$U = 10 \text{ m sec}^{-1}$
Lunghezza caratteristica	$L = 10^6 \text{ m}$
Variazione orizzontale della pressione	$\Delta p / \Delta x = \frac{10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}}{10^6 \text{ m}} = \frac{10 \text{ mb}}{1000 \text{ km}}$
Variazione verticale della pressione	$\frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{1000 \text{ mb}}{10^4 \text{ m}}$
Altezza di scala	$H = 10^4 \text{ m}$
Parametri di Coriolis e, f	$e, f = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$
Densita' media dell'aria.	$\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$

Sostituendo e sviluppando i calcoli, trascurando l'attrito, si ha:

per l'equaz. di moto orizzontale:

$$10^{-4} \sim -10^{-3} + 10^{-3} - 10^{-6}$$

per l'equaz. verticale:

$$10^{-2} \sim 10 + 10^{-3} - 10$$

Possiamo osservare che e' lecito trascurare il termine ew , ma non quello fv , essendo quest'ultimo confrontabile con le forze di pressione.

Una prima approssimazione: il vento geostrofico

Alla luce di quanto detto precedentemente, possiamo scrivere le equazioni nel piano orizzontale nel modo seguente:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u = 0 \end{cases}$$

dove abbiamo trascurato le accelerazioni orizzontali e il termine ew. Abbiamo ottenuto un sistema a due equazioni in due incognite, quindi risolvibile in modo finito, che mette in relazione diretta la forza di pressione e quella di Coriolis. Come conseguenza di ciò abbiamo la possibilità di raggiungere una situazione di regime del moto dell'aria, in cui la forza del gradiente di pressione e la forza deviante equilibrandosi stabilizzano il movimento dell'aria che non mostra variazioni nel tempo quando misurato da un punto fisso. Da sottolineare che il nostro è un sistema ideale in cui non vi è attrito, il campo di pressione stazionario e l'aria ha velocità costante, una volta raggiunto l'equilibrio; inoltre il moto si svolge a latitudine costante.

Dal sistema precedente abbiamo:

$$\begin{aligned} u &= u_g = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ (9) \quad v &= v_g = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

che definiscono le componenti del vento geostrofico; dal sistema (9) risulta che il vento geostrofico è diretto lungo le isobare. Può essere interessante notare che per altezze maggiori di un chilometro, alle quali l'attrito diventa trascurabile, il vento geostrofico costituisce una buona approssimazione del vento effettivo. In generale il vento geostrofico approssima il vento reale al 10% in quanto dall'analisi di

scala si vede che il termine piu' elevato che si trascura, l'accelerazione orizzontale, e' di un ordine di grandezza minore a quella del vento geostrofico.

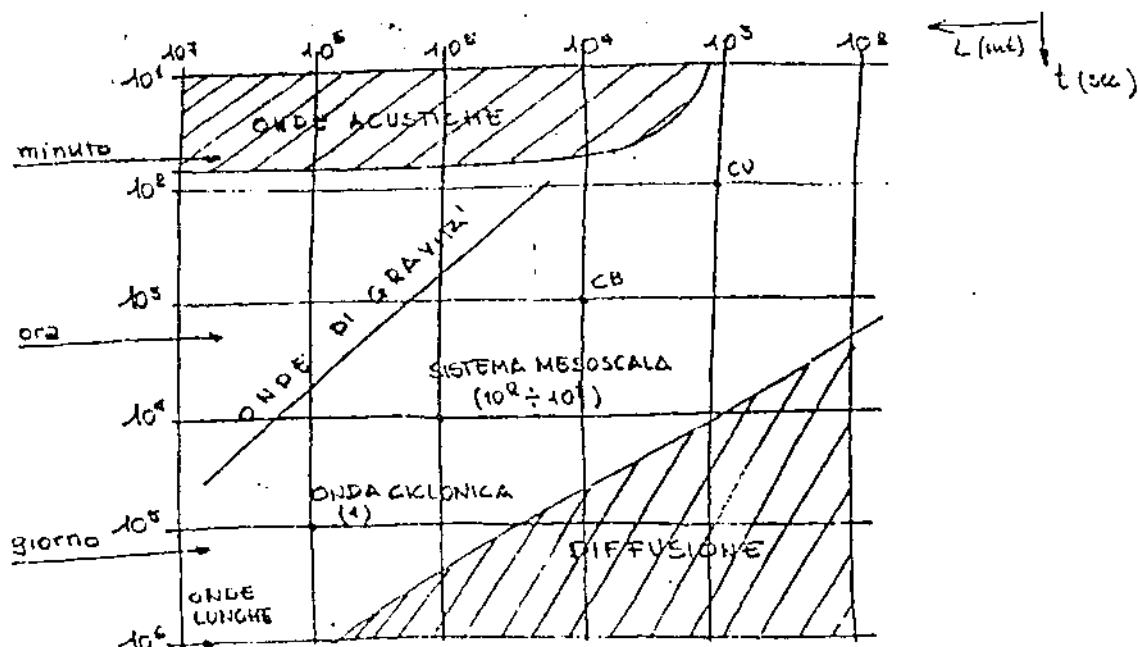
Numero di Rossby

Abbiamo visto la validita' dell'approssimazione geostrofica nel caso di un ciclone extratropicale, ci si può chiedere se sia valida o meno per altri sistemi. E' opportuno introdurre il Numero di Rossby, definito come:

$$R = \frac{\text{accelerazione-orizzontale}}{\text{Forza di Coriolis}} = \frac{V^2/L}{Vf} = \frac{V}{Lf}$$

dove maggiore è R, minore è la bonta' dell'approssimazione geostrofica.

Si può costruire il seguente grafico, ricordando che: L e' 1/4 della lunghezza d'onda della perturbazione e t (tempo caratteristico) e' uguale a 1/4 del periodo T.



Per ulteriore conferma della giustezza dell'approssimazione fatta con il vento geostrofico, possiamo vedere se otteniamo le stesse conclusioni utilizzando considerazioni diverse.

Sappiamo che, per una massa unitaria, si ha, per l'energia:

$$T = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

Per il lavoro, definito come dT/dt abbiamo la seguente espressione:

$$\frac{dT}{dt} = u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt}$$

Introducendo le espressioni delle accelerazioni date dal sistema scritto in forma completa si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & u \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + u f v - u e w + u \frac{1}{\rho} F_x + \\ & + v \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - v f u + v \frac{1}{\rho} F_y + \\ & + w \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - w g + w e u + w \frac{1}{\rho} F_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & u \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + v \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + w \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + u \frac{1}{\rho} F_x + \\ & + v \frac{1}{\rho} F_y + w \frac{1}{\rho} F_z - w g \end{aligned}$$

I termini a secondo membro rappresentano il lavoro della forza di pressione, della gravità e dell'attrito. Le componenti della forza deviante si elidono e era da aspettarsi, poiché essendo tale forza perpendicolare alla velocità, non dà contributo al lavoro. Se avessimo male eseguito le semplificazioni dei termini contenenti e ed f , per esempio trascurando eu nella

terza equazione e conservando ew nella prima, avremmo dei residui spuri di energia.

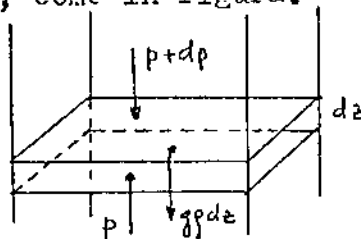
Possiamo tracciare il seguente quadro che dà gli ordini di grandezza per alcune caratteristiche perturbazioni meteorologiche:

	Tromba d'aria	Perturbazione extratropicale	Ciclone tropicale
W	10 m sec^{-1}	10^2 m sec^{-1}	1 m. sec^{-1}
U	10^2 m sec^{-1}	10 m sec^{-1}	50 m sec^{-1}
L	100 m	10^6 m	10^5 m
$\Delta p / \Delta x$	$\frac{40 \cdot 10^2 \text{ N m}^{-2}}{10^3 \text{ m}}$	$\frac{10^3 \text{ N m}^{-2}}{10^6 \text{ m}}$	$\frac{40 \cdot 10^2 \text{ N m}^{-2}}{10^5 \text{ m}}$
$\Delta p / \Delta z$		$\frac{10^3 \text{ mb}}{10^4 \text{ m}}$	
H	10^3 m	10^4 m	
f	10^{-4} sec^{-1}	10^{-4} sec^{-1}	10^{-4} sec^{-1}
e	10^{-4} sec^{-1}	10^{-4} sec^{-1}	10^{-4} sec^{-1}
ρ	1 kg m^{-3}	1 kg m^{-3}	1 kg m^{-3}

EQUAZIONE DELL'IDROSTATICA

E' un'equazione molto importante che esprime l'assunzione che l'atmosfera sia in equilibrio statico con la forza di pressione netta che bilancia esattamente la forza di gravità.

Si consideri una colonna d'aria verticale con un'area di base unitaria, come in figura.



Sia dz l'altezza e ρ la densità, $\rho g dz$ la forza peso; le pressioni che agiscono sulla faccia inferiore e superiore rispettivamente p e $p+dp$. Uguagliando le forze, si ottiene:

$$p - (p + dp) - \rho g dz = 0$$

dove le forze dirette verso il basso hanno segno negativo.

Semplificando:

$$-dp - \rho g dz = 0$$

equazione dell'idrostatica.

E' interessante notare come questa equazione si ottenga dalla terza equazione del moto, attraverso considerazioni di ordini di grandezza.

Infatti l'analisi di scala da' come risultato:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &\sim \frac{w}{t/v} \sim 10^{-7} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &\sim \frac{\Delta p}{\Delta z} \sim \frac{1000 \text{ mb}}{10^4 \text{ m}} \sim \frac{10^6 \text{ dine cm}^{-2}}{10^4 \text{ m}} \sim 10 \\ (1 \text{ dine} &= 10^{-5} \text{ N}) \\ w &\sim 10^{-4} \cdot 10^{-2} = 10^{-6} \\ g &\sim 10 \end{aligned}$$

La terza equazione del moto:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + eu - g + \frac{1}{\rho} F_z$$

diventa dunque:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

VENTO TERMICO

Fissiamo ora l'attenzione sulle equazioni che descrivono il moto nel piano orizzontale:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{aligned}$$

ricordando che:

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_g &= +\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

con semplice sostituzione possiamo scrivere:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{du}{dt} &= -v_g + v \\ \frac{1}{f} \frac{dv}{dt} &= +u_g - u \end{aligned}$$

Poniamo come ipotesi che du/dt non subisca variazioni al variare della quota. Considerando un livello inferiore z_0 e uno superiore z_1 possiamo scrivere:

$$(12) \quad \begin{aligned} u_1 - u_0 &= u_{g1} - u_{g0} \\ v_1 - v_0 &= v_{g1} - v_{g0} \end{aligned}$$

Queste ultime espressioni legano il campo del vento a due livelli diversi; nell'ipotesi considerata si può dunque dire che la variazione del vento orizzontale con la quota è uguale alla variazione con la quota del vento geostrofico; essa prende il nome di vento termico.

Cerchiamo di trovare le componenti di questo vento. Possiamo intuire che dipenderanno dalla forza di Coriolis, dalla forza di gravità e dalla quota. Premettiamo qualche considerazione: pensiamo di trovarci in un piano x, z con p costante. Possiamo scrivere che: (cfr pag 33)

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = - \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Dall'equazione dell'idrostatica sappiamo che: $\frac{dp}{dz} = -g\rho$, quindi sostituendo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = \rho g dz \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial z}{\partial x}$$

Abbiamo così trovato un'espressione alternativa della forza di pressione; scriviamo allora il sistema (10) come:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{du}{dt} &= - \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} + v \\ \frac{1}{f} \frac{dv}{dt} &= - \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} - u \end{aligned}$$

Nella ipotesi di accelerazione orizzontale che non varia con la quota, ponendo $z_T = z - z_0$ si ha:

$$(14) \quad \begin{aligned} 0 &= - \frac{g}{f} \frac{\partial z_T}{\partial x} + (v_1 - v_0) \\ 0 &= - \frac{g}{f} \frac{\partial z_T}{\partial y} - (u_1 - u_0) \end{aligned}$$

posto: $v_1 - v_0 = v_T$; $u_1 - u_0 = u_T$

Otteniamo le componenti del vento termico:

$$(15) \quad \begin{aligned} u_T &= - \frac{g}{f} \frac{\partial z_T}{\partial x} \\ v_T &= \frac{g}{f} \frac{\partial z_T}{\partial y} \end{aligned}$$

Il vento negli strati alti dell'atmosfera può pensarsi

come la somma del vento geostrofico al suolo e del vento termico.

Vediamo ora il perché del termine "vento termico". Abbiamo dall'equazione dell'idrostatica:

$$g dz = - \frac{1}{\rho} dp$$

Dall'equazione dei gas perfetti si ha: $p/\rho = RT$, da cui:

$$g dz = - RT \frac{dp}{p}$$

Integrando su uno strato di spessore finito ed indicando con T un opportuno valore medio della temperatura per lo strato, otteniamo:

$$g (z_1 - z_0) = - RT \ln \frac{p_1}{p_0}$$

$$g (z_T) = - RT \ln \frac{p_1}{p_0}$$

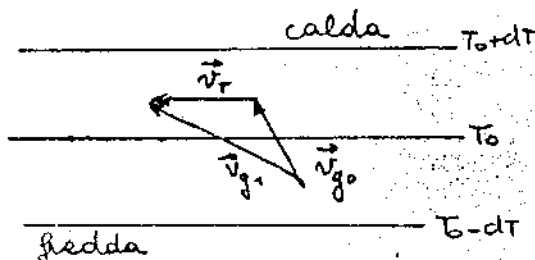
La z che entra nella definizione del vento termico è una grandezza proporzionale alla temperatura. Le linee di uguale z_T , cioè le linee di egual spessore fra due superfici isobariche p_1 e p_0 vengono a coincidere con le isoterme della temperatura media dello strato compreso tra p_1 e p_0 . Vediamone qualche conseguenza:

in forma vettoriale la (15) può essere scritta:

$$\vec{v}_T = \frac{g}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla} z_T$$

dove $\vec{k}$ è il versore dell'asse z . Essa dice che il vento termico è diretto parallelamente alle isoterme (linee di uguale z_T) con l'aria calda a destra della corrente, con l'aiuto della

figura vediamo inoltre che se il vento geostrofico tende a



ruotare in senso antiorario con l'altezza, il verso di v_T stabilisce la posizione delle masse d'aria calda e fredda.

Nel caso raffigurato si vede anche che in questo caso vi è avvezione fredda (vedere "Esercizi" per l'avvezione di temperatura) dovuta al vento geostrofico. Viceversa, quando il vento geostrofico tende a ruotare in senso orario vi è avvezione calda, come è facile verificare.

VENTO CICLOSTROFICO E VENTO DI GRADIENTE

Ricordiamo le equazioni del moto (10):

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u \end{aligned}$$

In forma vettoriale più compatta, il sistema (16) si può scrivere:

$$(17) \quad \frac{d\vec{V}_2}{dt} = f \vec{V}_2 \times \vec{k} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_2 p$$

dove $\vec{V}_2$ è la componente orizzontale del vento, $\vec{k}$ è il versore dell'asse z e $\vec{\nabla}_2 p$ è la componente orizzontale di $\vec{\nabla} p$.

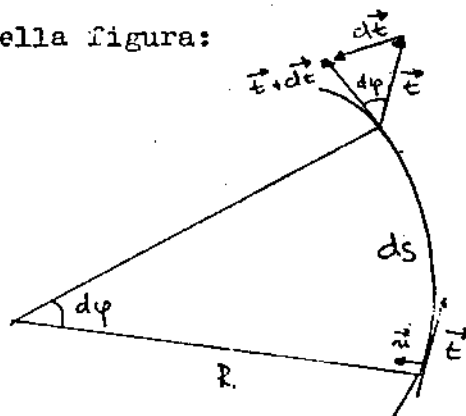
Ci proponiamo ora di scrivere la (17) per un sistema di riferimento solidale con la particella d'aria. Supponiamo che essa compia una traiettoria curvilinea.

Si ha allora $\vec{V}_2 = |\vec{V}_2| \vec{t}$ dove $\vec{t}$ è il versore orientato parallelamente alla direzione del flusso in ogni punto.

Quindi

$$(18) \quad \frac{d\vec{V}_2}{dt} = \vec{t} \frac{dV_2}{dt} + V_2 \frac{d\vec{t}}{dt}$$

Esaminiamo il secondo termine del secondo membro con lo ausilio della figura:



dove R è il raggio di curvatura della traiettoria punto per punto, ds è lo spostamento infinitesimo, $\vec{n}$ è il versore normale alla traiettoria: esso si prende > 0 se è diretto alla sinistra della corrente. Possiamo innanzitutto scrivere:

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} V_2 \quad . \quad \text{Infatti,} \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \frac{dt}{ds} \quad ;$$

$$dt = d\varphi \quad \text{per angoli infinitesimi e} \quad R d\varphi = ds \quad .$$

Sostituendo:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

Si pone $R > 0$ quando il centro di curvatura è nel verso di $\vec{n}$ positivo. La (18) diventa:

$$(19) \quad \frac{d\vec{V}_2}{dt} = \vec{t} \frac{dV_2}{dt} + \vec{n} \frac{V_2^2}{R}$$

Introducendo la (19) nella (17), otteniamo per componenti:

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{V_2^2}{R} + \frac{\rho}{f} V_2 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} \end{aligned}$$

A) Vento ciclostrofico

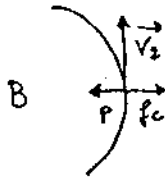
Se si può trascurare il termine fV_2 allora si ha:

$$\frac{V_2^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m}$$

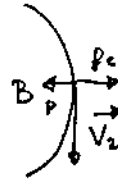
Risolvendo per V_2 otteniamo la velocità del vento ciclostrofico, che deve essere reale e non negativa:

$$(21) \quad V_2 = \left(-\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} \right)^{1/2}$$

Il vento ciclostrofico può essere dunque sia ciclonico che anticiclonico come mostrato in figura.



$$\frac{\partial p}{\partial m} < 0 ; R > 0$$



$$\frac{\partial p}{\partial m} > 0 ; R < 0$$

Dove P è la forza di pressione, f_c la forza centrifuga.

Se ad esempio si prende un tipico tornado, la cui velocità tangenziale è circa 30 m/sec a una distanza di 300 m si ha che il rapporto tra l'accelerazione centripeta e la forza di Coriolis $\frac{V_1^2/R}{f V_2} = \frac{V_1}{f R}$, analogo al numero di Rossby, è circa 10^3 . Il termine $f V_2$ è dunque trascurabile.

B) Vento di gradiente

Se invece il termine di Coriolis non è trascurabile, la soluzione della seconda delle (20) è:

$$(22) \quad V_2 = - \frac{f R}{2} \pm \left(\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{f} \frac{\partial p}{\partial m} \right)^{1/2}$$

chiamato vento di gradiente. Tenendo conto che le soluzioni fisiche possibili sono quelle per cui V_2 è reale e non negativo, è facile convincersi che le soluzioni della (22) si possono ricondurre a quattro situazioni:

$R > 0$
Flusso in verso
antiorario

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial m} < 0 \text{ Intorno a una} \\ \quad \quad \quad \text{bassa pressione} \\ \\ \frac{\partial p}{\partial m} > 0 \end{array} \right.$$

nessuna soluzione
reale

$$\begin{array}{l}
 R < 0 \\
 \text{Flusso in verso} \\
 \text{orario}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \frac{\partial p}{\partial m} < 0 \\
 \text{intorno ad un'alta} \\
 \text{pressione} \\
 \\
 \frac{\partial p}{\partial m} > 0 \\
 \text{intorno ad una} \\
 \text{bassa pressione}
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \text{due soluzioni a seconda} \\
 \text{del segno nella (22)}
 \end{array}$$

E' interessante in conclusione vedere in che rapporto stanno il vento geostrofico e il vento di gradiente. Poiché il vento geostrofico è dato da:

$$\vec{V}_g = \vec{k} \times \frac{1}{f} \nabla_2 p$$

In coordinate intrinseche:

$$V_g = - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial m}$$

Allora si può scrivere la (20) come:

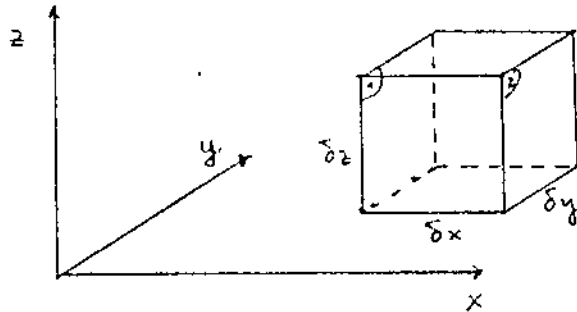
$$\frac{V_2^2}{R} + f V_2 - f V_g = 0$$

$$\frac{V_g}{V_2} = 1 + \frac{V_2}{f R}$$

per $R > 0$, $V_g > V_2$ e il vento geostrofico è una sovrastima del vento, mentre per $R < 0$ ne è una sottostima.

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Si consideri un volume $\delta x \delta y \delta z$ fisso nello spazio come mostrato in figura:



Cerchiamo un'espressione analitica per la conservazione della massa. Calcoliamo il flusso di massa entrante nella faccia 1. Essa sarà tutta quella, con velocità dx/dt , compresa nell'elemento di volume $dx \delta y \delta z$, cioè, per unità di tempo e di area:

$$\rho \frac{dx \delta y \delta z}{dt \delta y \delta z} = \rho u$$

Analogamente per la faccia 2, sviluppando in serie si avrà:

$$\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \frac{\delta x}{2}$$

Il flusso risultante per unità di tempo attraverso le facce perpendicolari all'asse x , sarà:

$$\begin{aligned} \rho u \delta y \delta z - \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \delta x \right] \delta y \delta z &= \\ &= - \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

Estendendo il risultato alle altre facce si ottiene la risultante del flusso di massa per unità di tempo attraverso

l'elemento di volume $\delta x \delta y \delta z$:

$$- \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

Dividendo per $\delta x \delta y \delta z$ si ottiene la risultante per unità di volume, cioè la variazione della densità locale $\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Otteniamo così l'equazione di continuità:

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

che può essere anche scritta come:

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

dove $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ è la divergenza del vento. Ovvero:

$$(23) \quad - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

SISTEMA DI APPROSSIMAZIONE QUASI STATICA

Avevamo scritto, (7), le equazioni del moto e avevamo sottolineato la non risolvibilità del sistema per mancanza di due equazioni in modo da avere un sistema di cinque equazioni e cinque incognite. Per poter arrivare alla soluzione del nostro problema, ricordiamo il primo principio della termodinamica nella forma $dQ = C_p dT - \alpha dp$.

Sapendo inoltre che si ha l'espressione:

$$(24) \quad H = \frac{dQ}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}$$

se dall'equazione di stato: $p\alpha = R'T$, $dT = \frac{\alpha dp + p d\alpha}{R'}$,
ed $\alpha = \frac{1}{\rho}$, segue che:

$$H = \frac{C_p}{R'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}$$

Introducendo l'equazione di continuità la (24) diventa:

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{C_p}{C_v} p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{R'}{C_v} \rho H$$

sapendo che $C_p = C_v + R'$.

Facendone la derivata locale:

$$(25) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \frac{C_p}{C_v} p \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{R'}{C_v} \rho H$$

Possiamo ora scrivere il nostro sistema in forma completa, introducendo queste due nuove equazioni trovate; da notare che non intervengono nuove variabili, quelle in gioco sono sempre u, v, w, p, ρ .

$$\begin{array}{lcl}
 1 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f u - e u + \frac{1}{\rho} F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \frac{1}{\rho} F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + e u - f + \frac{1}{\rho} F_z \end{array} \right. & \text{equazioni del moto} \\
 2 & & \\
 3 & & \\
 4 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{array} \right. & \text{equazione di continuità} \\
 5 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \frac{c_p}{C_v} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{R'}{C_v} \rho H \end{array} \right. & \text{1° principio della} \\
 & & \text{termodinamica.}
 \end{array}$$

Il sistema ora scritto, conosciuto l'andamento dei campi iniziali delle grandezze in gioco, permette di determinare i campi per ogni istante successivo. Infatti al primo membro di ogni equazione appare la derivata locale che ci permette di ottenere la variazione locale prevista; per questo motivo prendono il nome di equazioni prognostiche. Nel sistema appaiono termini non lineari, di 2° grado quali $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p$, ecc. Essi complicano notevolmente il problema di trovare soluzioni dell'equazioni del sistema. si preferisce perciò, per l'applicazione, l'uso di metodi di integrazione numerica, piuttosto che metodi analitici. Conoscendo cioè i secondi membri delle equazioni ad un determinato istante, per ottenere la variazione prevista Δp si moltiplica il secondo membro per lo step di tempo Δt . In formule:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \frac{\partial p}{\partial t} &\simeq \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{t+\Delta t} - p_t}{\Delta t} = \text{termini noti all'istante } t \\
 b) \quad p_{t+\Delta t} &= p_t + \Delta t \cdot (\text{termini noti a } t)
 \end{aligned}$$

In questo modo si può proseguire indefinitamente.

Con il sistema di equazioni di cui sopra ci si trova

subito davanti a due problemi fondamentali:

- 1) nella terza equazione è richiesta la conoscenza della corrente verticale w , che tuttavia non è possibile misurare sperimentalmente.
- 2) per la misura sperimentale del vento orizzontale alle varie quote si utilizzano speciali palloni di cui si seguono gli spostamenti dalla verticale. L'altezza cui si trova il pallone è data istante per istante dall'equazione idrostatica che, come abbiamo visto dall'analisi di scala è un'ottima approssimazione della realtà. Questa equazione, per l'appunto, lega strettamente la pressione p con la densità ρ . Questo legame però non viene rispettato dalle equazioni 4 e 5 del sistema che "fanno variare" p e ρ indipendentemente l'una dall'altra; mentre nelle osservazioni ρ e p sono strettamente collegate, nelle 4 e 5 non c'è nessuna relazione tra di esse.

Non è possibile neanche, per ovviare al primo problema sostituire la terza equazione con l'equazione dell'idrostatica perchè non avrei più nessuno strumento per il calcolo delle w necessaria per calcolare $\vec{v}(u, v, w)$.

E' necessario quindi procedere ad alcune manipolazioni. Derivando ambo i membri dell'equazione idrostatica $dp = -\rho g dz$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) &= -g \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) &= -g \frac{\partial \rho}{\partial z}\end{aligned}$$

con l'equazione di continuità diventa:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = g \vec{V}_2 \cdot (\rho \vec{V}_2) + g \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

dove il 1° termine del secondo membro è la componente orizzontale della divergenza e il 2° la componente verticale.

Se noi integriamo da un livello generico z fino alla sommità dell'atmosfera, per una z qualsiasi si avrà:

$$(26) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -g \int_z^\infty \vec{V}_2 \cdot (\rho \vec{V}_2) + g \rho w_R$$

dove $(\rho w)_{z=\infty} = 0$; se fosse $z = 0$ allora $w_R = 0$

Il primo termine a destra della (26) rappresenta il contributo alla tendenza della pressione dato dalla divergenza di massa orizzontale, è un bilancio di ciò che entra e esce sulla colonna d'aria, il secondo è la variazione di massa dal basso. L'equazione (26) prende il nome di equazione delle tendenze.

Ci proponiamo ora di trovare un'equazione diagnostica per la velocità verticale w (che cioè ad ogni istante, conoscendo i campi di ϕ , $\vec{v}$, ecc. dia il campo della $w(x, y, z)$). Dal 1° principio della termodinamica in forma trasformata, introducendo l'equazione idrostatica, si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 p + w_R \rho g - \frac{c_p}{c_v} p \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 - \frac{c_p}{c_v} p \frac{\partial w_R}{\partial z} + \frac{R}{c_v} p H$$

introducendo la (26):

$$\frac{\partial w_R}{\partial t} = \frac{c_v}{c_p} \frac{1}{p} \left[-\vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 p - \frac{c_p}{c_v} p \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 + \frac{R}{c_v} p H + g \int_z^\infty (\rho \vec{V}_2) dz \right]$$

integrando rispetto a z :

$$w_R = w(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z [\text{termini noti}] dz$$

Abbiamo ora eliminato la difficoltà dovuta al vento verticale avendo un'equazione che permette di ricavarlo da grandezze i cui campi sono conosciuti in partenza. Il sistema diventa allora:

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} u - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{f} v + \frac{1}{f} F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v - \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{p}{f} u + \frac{1}{f} F_y \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \frac{c_p}{c_v} p \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{R}{c_v} p H \\ \rho = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} \\ W = W_0 + \int_{z_0}^z f(\rho, u, v) dz \end{cases}$$

Esso permette di ricavare la densità con l'equazione della idrostatica, risolvendo così il secondo problema che ci eravamo posti all'inizio.

Il sistema (27) viene chiamato sistema di approssimazione quasi statica; fu realizzato da F. Richardson nel 1922 a Londra e pubblicato con il titolo: "Weather prediction by numerical process".

Condizioni al contorno sulla superficie terrestre

Se si integra il sistema (27) su tutto il globo, non si devono porre condizioni al contorno ai lati, mentre è necessario porre condizioni al contorno per quanto riguarda la superficie terrestre.

In generale si pone:

$$1) \quad f(x, y, z) = 0 \quad \text{equazione della superficie}$$

$$2) \quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = 0$$

La 2) rende nulla la componente del vento $\vec{v}$ normale alla superficie. Esplicitando la 1) e ponendo in 2), si avrà:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (z - h(x, y)) = 0$$

dove la z è la quota sul livello del mare, $h(x, y)$ è la topografia, l'altezza topografica, del terreno.

Inoltre:

$$\vec{v} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} \right) \right] = 0$$

$$-u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} + w = 0$$

La condizione al contorno diventa dunque:

$$(28) \quad w = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} h$$

Essa dà le velocità verticali prossime al suolo, che, tuttavia devono essere tali da non violare considerazioni sugli ordini di grandezza.

Rapporto tra lo step di tempo e di spazio

Quando si integrano numericamente le equazioni del moto va rispettata la seguente relazione per le equazioni differenziali lineari:

$$(29) \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$$

tra lo step di tempo Δt e lo step di spazio Δx ; c è la massima velocità di propagazione delle onde che sono soluzioni del sistema considerato. Se non viene rispettata la (29), hanno luogo fenomeni di instabilità lineare. Rich applicò la (29) al sistema a pag. 27, considerando strati verticali di 2 Km ($\Delta x = 2 \cdot 10^3$ m). La (29) diventava:

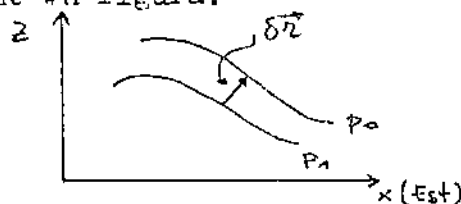
$$(30) \quad \Delta t \leq \frac{2000 \text{ m}}{330 \text{ m/sec}} = 6 \text{ sec}$$

In questo caso $c = 330$ m/sec, la velocità delle onde acustiche che sono soluzioni del sistema suddetto; esso infatti è molto generale e descrive tutta la fisica dell'atmosfera. La (30) impone che le previsioni siano fatte al massimo ogni 6 sec. Usando il sistema quasi statico, che non permette la propagazione di onde acustiche lungo la verticale (a causa dell'eq. idrostatica che assume p e ρ in equilibrio), $\Delta t \leq 10 \text{ min}$.

SISTEMA DI RIFERIMENTO x, y, p

Come è detto nell'appendice degli esercizi, esistono carte in cui si tracciano, invece delle linee isobariche, le linee isoaltimetriche o topografiche. Si è accennato alla maggiore comodità di uso di un sistema di riferimento x, y, p . In particolare si cerca di trovare una espressione che possa sostituire nelle equazioni trovate il gradiente di pressione.

Siano ϕ_0 e ϕ_1 le tracce sul piano x, z di due superfici isobariche, come in figura:



Sia δp una variazione infinitesima di pressione e sia $\delta \vec{r}$ di x , componenti $\delta x, \delta y$.

Differenziando:

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z = \vec{\nabla}_p \cdot \delta \vec{r}$$

dove $\delta \vec{r}$ è il gradiente topografico. Se $\delta \vec{r}$ giace su una superficie a p costante:

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z = 0$$

da cui con semplici passaggi:

$$(31) \quad \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{-\partial p / \delta x}{\partial p / \delta z}$$

Ricordando l'equazione idrostatica $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho}{\alpha}$, sostituendo

nella (31) si ricava che:

$$(32) \quad \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial z}{\partial x}$$

In modo analogo si ricava:

$$(32') \quad \alpha \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial z}{\partial y}$$

Sostituendo al gradiente isobarico quello topografico, le equazioni orizzontali del moto (7) diventano:

$$(33) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g \frac{\partial z}{\partial x} + f v + \frac{1}{\rho} F_x \\ \frac{dv}{dt} &= -g \frac{\partial z}{\partial y} - f u + \frac{1}{\rho} F_y \end{aligned}$$

Le equazioni del vento geostrofico (9) nel nuovo sistema di riferimento diventano:

$$\begin{aligned} f v_g &= g \frac{\partial z}{\partial x} \\ f u_g &= -g \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

Si noti che rispetto al sistema di riferimento precedente questo ha il vantaggio di non contenere la densità ad ogni livello. In quest'espressione è sparita, e per ogni gradiente topografico esiste un vento geostrofico indipendente dalla quota cui ci si trova.

VORTICITA' ED EQUAZIONE DELLA VORTICITA' IN x, y, p .

Scriviamo in forma esplicita le prime due equazioni del moto nel sistema x, y, p , trascurando le forze di attrito:

$$(34) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + f v$$

$$(34') \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial z}{\partial y} - f u$$

dove $\omega = \frac{dp}{dt}$ è la velocità verticale generalizzata. Deriviamo ora la (34) rispetto a y e la (34') rispetto a x . Sottraendo quindi alla seconda la prima, ponendo $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ed effettuando semplici calcoli possiamo scrivere:

$$(34'') \quad \frac{\partial}{\partial t} (\zeta + f) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f) - (\zeta + f) \vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right)$$

dove al posto di ζ , vorticità relativa, al primo membro è stato sostituito $\zeta + f$, vorticità assoluta, essendo f invariante rispetto al tempo.

Prima di effettuare considerazioni sull'equazione precedente è bene premettere il seguente calcolo che chiarisce meglio il significato fisico della vorticità.

Si vede facilmente che $\zeta = \vec{k} \cdot \text{rot } \vec{v}$, ricordando che

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Si può anche scrivere, secondo lo sviluppo per una terna intrinseca:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \vec{\nabla}_2 \times \vec{v}_2$$

istantaneamente sarà:

$$(35) \quad \zeta = \vec{k} \cdot \left[\left(\vec{k} \frac{\partial}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial m} \right) \times \vec{t} v_2 \right] =$$

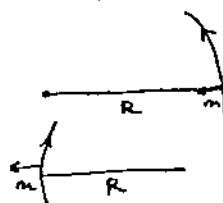
$$= \vec{k} \cdot \left[\vec{t} \times \vec{t} \frac{\partial v_z}{\partial s} + v_z \left(\vec{t} \times \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} \right) + \vec{n} \times \vec{t} \frac{\partial v_z}{\partial n} + v_z \vec{n} \times \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} \right]$$

essendo $\frac{\partial \vec{t}}{\partial s} = \frac{\vec{n}}{R}$, $\vec{n} \times \vec{t} = -\vec{k}$ e poiché il primo e l'ultimo termine si annullano, la (35) diventa:

$$(36) \quad \zeta = \frac{v_z}{R} - \frac{\partial v_z}{\partial n}$$

dove $\frac{v_z}{R}$ è la velocità angolare istantanea, $\frac{\partial v_z}{\partial n}$ è un termine di gradiente ("shear") e rappresenta la correzione per ottenere l'effettiva velocità angolare prodotta dalla distorsione dovuta alle differenze della velocità orizzontale al contorno. Avremo quindi i due casi:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad R > 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial n} < 0 \\ \text{B)} \quad R < 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial n} > 0 \end{aligned}$$



L'equazione (34'') prende il nome di equazione della vorticità. prima di vedere se sia possibile semplificarla in qualcuno dei suoi termini, vediamo cosa questi rappresentano.

L'equazione della vorticità stabilisce le cause della variazione locale della vorticità che vengono elencate a secondo membro. Abbiamo:

$$\text{A)} \quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f)$$

trasporto orizzontale; termine non lineare che corrisponde al termine di avvezione nelle equazioni del moto.

$$\text{B)} \quad (\zeta + f) \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$$

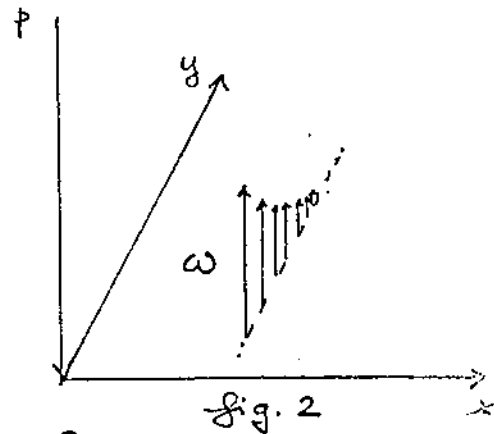
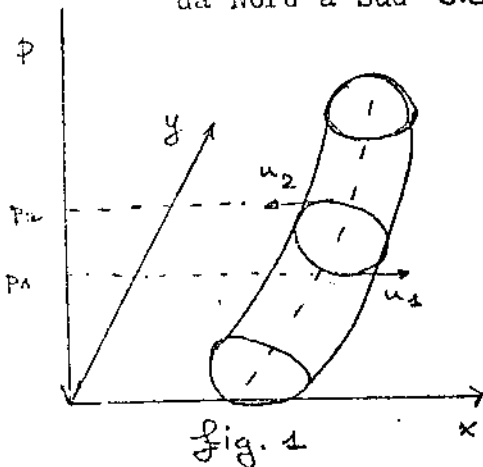
termine che produce variazioni di vorticità, in cui la divergenza orizzontale diminuisce la vorticità assoluta, la convergenza la fa aumentare

$$c) \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p}$$

contributo alla vorticità dalla "rotazione dei tubi di vortice".

Vediamo più in dettaglio quale sia il significato dell'ultimo termine. Consideriamo la fig. 1, abbiamo: $\frac{\partial u}{\partial p} \approx \frac{\Delta u}{\Delta p} = \frac{u_1 - u_2}{p_1 - p_2} > 0$

tubo di vortice diretto da Nord a Sud sia $\frac{\partial v}{\partial p} = 0$



Consideriamo maggiore di zero anche la $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ (vedi fig. 2), dove $\omega = \frac{dp}{dt}$. Allora si avrà che il tubo di vortice tenderà ad inclinarsi, l'estremità Sud si alza rispetto alla Nord, trasferendo quindi vorticità nel piano x,y, aumentando quindi la componente verticale ~~della vorticità~~. Da notare che se il termine $\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial p}$ è positivo la vorticità aumenterà nel piano x,y; analogamente il termine $-\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p}$, inclinando tubi di vortice in direzione E.-W.

analisi di scala

Possiamo porre:

$$U = 10 \text{ m sec}^{-1}$$

$$W = 10^{-2} \text{ m sec}^{-1}$$

$$L = 10^6 \text{ m}$$

$$H = 10^4 \text{ m}$$

$$t = 10^5 \text{ sec}$$

$$f \sim 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$$

$$\beta = \frac{df}{dy} \sim 10^{-11} \text{ m sec}^{-1}$$

Esaminando i vari termini sarà:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \leq \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim \frac{U/L}{L/U} = \frac{U^2}{L^2} = \frac{10^2}{10^{12}} = 10^{-10} \text{ sec}^{-2}$$

$$u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sim v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sim U \frac{U/L}{L} = \frac{U^2}{L^2} = 10^{-10} \text{ sec}^{-2}$$

$$\omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \sim W \frac{\partial \zeta}{\partial z} \text{ (poiché } \omega \approx -g\theta W) \sim \frac{UW}{LH} \sim 10^{-11} \text{ sec}^{-2}$$

$$v \frac{df}{dy} = u\beta \sim 10^{-10} \text{ sec}^{-2}$$

$$f \vec{\nabla}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 \leq \frac{fU}{L} \sim 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \leq \frac{W}{L} \cdot \frac{U}{H} \sim 10^{-11} \text{ sec}^{-2}$$

Possiamo allora ridurre l'equazione della vorticità nella forma:

$$(37) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\zeta + f) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_2 (\zeta + f) = -f \vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}$$

Dov'è si sono trascurati i tubi di vortice e si è posto:

$$(\zeta + f) \vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v} \approx f \vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}$$

poiché ζ è di un ordine di grandezza inferiore ad f

APPROSSIMAZIONE DEL LIVELLO MEDIO

Una prima approssimazione della (34) è quella del "livello medio". Premettiamo alcune considerazioni sull'equazione di continuità: $-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$. Si può dimostrare che nel sistema di riferimento x, y, p , essa diviene:

$$\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}_2 = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

dove l'indice 2 indica la divergenza orizzontale. Integrando tra due livelli di pressione p_0 e p_1 otteniamo:

$$(38) \quad \overline{\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}_2} (p_1 - p_0) = - (\omega_1 - \omega_0)$$

ponendo $p_0 = 1000$ mbar, $p_1 = 0$, $\omega_1 = 0$, la (38) diventa:

$$\overline{\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}_2} = - \frac{\omega_0}{1000} \approx 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$$

se $\omega_0 = 10$ mbar/3ore. Per un livello generico si ha:

$$\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L} = 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$$

Si verifica cioè il fatto che ad un livello generico la divergenza è di un ordine di grandezza superiore a quella mediata su tutta l'atmosfera. Ciò vuol dire che esisteranno dei livelli di pressione in cui si ha divergenza negativa; esisterà perciò un livello in cui essa si annulla. Sperimentalmente si vede che con buona approssimazione il livello in cui si annulla è quello di 500 mbar. Ricordando la (37), possiamo scrivere

per 500 mb:

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial t} (Z+f) \Big|_{500mb} = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_2 (Z+f) \Big|_{500mb}$$

Scriviamo la (39) in forma diversa. Ricordando le componenti del vento geostrofico in x, y, p , $u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y}$; $v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x}$ la $\sum$ sarà allora:

$$Z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{f} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = \frac{g}{f} \nabla^2 z$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{g}{f} \nabla^2 z \right] = \frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t}$$

inoltre

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_2 (Z+f) &= -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial (Z+f)}{\partial x} + \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial (Z+f)}{\partial y} = \\ &= \frac{g}{f} [J(z, Z+f)] \end{aligned}$$

dove per definizione di determinante Jacobiano si ha:

$$[J(z, Z+f)] = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial (Z+f)}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial (Z+f)}{\partial x}$$

La (39) diventa allora:

$$(40) \quad \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{500mb} = -J[z, Z+f]_{500mb}$$

Questa equazione, detta di Von Neumann, permette di prevedere le variazioni locali di z . Attraverso i seguenti passi si procede in pratica per una previsione:

- considerando una mappa a 500 mb calcolo J_{t_0} al tempo t_0 .
- con il metodo del rilascio (vedi "Esercizi") determino $\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t_0}$
- estrapolo nel tempo la z mediante la $z_{dt} = z_{t_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t_0} dt$

- d) traccio una mappa prevista al tempo $t_0 + dt$ e calcolo $J_{t_0 + dt}$.
- e) itero i punti b) c) d).

Il tutto viene effettuato dal calcolatore data la ovvia complessità di calcolo.

APPROSSIMAZIONE QUASI GEOSTROFICA

Possiamo ora pensare per scopi applicativi di sostituire nella (37) al vento, il vento geostrofico. la cosa è possibile ma occorre prestare una certa attenzione.

Perchè si possa formare un vortice ciclonico, sistema in cui è presente una divergenza negativa (convergenza) della velocità orizzontale, occorre che, non appena inizia il movimento della massa d'aria, intervenga la forza deviante di Coriolis che porta alla formazione del vortice. La divergenza orizzontale assume un ruolo dominante nella formazione dei vortici. Se sostituissi in tutti i termini della (37) al vento il vento geostrofico, avrei: 1) vorticità geostrofica 2) trasporto geostrofico della velocità, 3) vento geostrofico nella divergenza.

E' proprio quest'ultimo termine ad essere errato: la divergenza dipende proprio dalla componente non geostrofica del vento e la divergenza del vento geostrofico è nulla. Non è lecita quindi la sostituzione nel termine della divergenza.

Per potere eliminare questa difficoltà occorre esprimere la divergenza del vento in funzione di altre quantità. Per fare ciò ricordiamo l'equazione di continuità nel sistema x, y, p :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

cioè

$$\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}_2 = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

segue che la (37) si può scrivere:

$$(41) \quad \frac{\partial}{\partial t} (Z+f)_g + \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla} (Z+f)_g = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

dove l'indice g sta per "geostrofico". La (41) prende il nome di: "equazione della vorticità nell'approssimazione quasi geostrofica"; può essere anche scritta:

$$\frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{g}{f} J(z, Z+f) = f \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

Trasportando lo Jacobiano a secondo membro possiamo scrivere, moltiplicando per f/g :

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} = -J(z, Z+f)$$

Compaiono in esso due incognite: 1) la variazione locale della quota rispetto al tempo; 2) la variazione locale della velocità verticale generalizzata con la pressione $\frac{\partial \omega}{\partial p}$, mentre lo Jacobiano al secondo membro è il termine noto. Occorre dunque trovare un'altra relazione per poter eliminare l'indeterminazione. Ricordiamo innanzi tutto alcuni concetti.

Temperatura potenziale

Dal primo principio della termodinamica si ha: $\delta Q = C_v dT + p d\alpha$
Per una trasformazione adiabatica $\delta Q = 0$; $C_p dT = \alpha dp$ e cioè:

$$\frac{C_p}{R} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} = 0 \quad . \text{ Integrando:}$$

$$\frac{C_p}{R} \int_{T_1}^T = \int_{p_1}^p \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln \frac{T}{T_1} = \ln \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{R}{C_p}} \Rightarrow \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{R}{C_p}} \Rightarrow \vartheta = T \left(\frac{p}{1000} \right)^{-\frac{R}{C_p}}$$

ϑ è la temperatura che assumerebbe una massa d'aria a pressione p e a temperatura T se fosse portata adiabaticamente alla pressione standard di 1000 mb.

Supponendo che nell'atmosfera ogni movimento di masse d'aria avvenga adiabaticamente, il primo principio della termodinamica si può esprimere:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

Quindi possiamo scrivere, in x, y, p :

$$(42) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_2 \vartheta + \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = 0$$

Osserviamo che, lavorando a pressione costante e dipendendo ϑ solo dal sistema x, y, p , è vera la relazione:

$$\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

ovvero

$$\frac{1}{\vartheta} \nabla \vartheta = \frac{1}{\alpha} \nabla \alpha$$

Dall'equazione idrostatica: $\alpha = -g \frac{\partial z}{\partial p}$, possiamo scrivere:

$$(43) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-g \frac{\partial z}{\partial p} \right) = -g \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)$$

Dalla (42) abbiamo:

$$(44) \quad \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_2 \alpha + \omega \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = 0$$

Ricordando la (43), dividendo per $-g/\alpha$ otteniamo:

$$(45) \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) + \omega \left(-\frac{\alpha}{g\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial z}{\partial p}$$

Ponendo σ = stabilità verticale o statica = $-\frac{\alpha}{g\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial p}$
la (45) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) + \sigma \omega = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial z}{\partial p}$$

Sostituendo al vento il vento geostrofico:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) + \sigma \omega = -\frac{g}{f} \nabla^2 \left(z, \frac{\partial z}{\partial p} \right)$$

Abbiamo così ottenuto il seguente sistema "risolvibile":

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} = -J(z, z + f)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) + \sigma \omega = - \frac{g}{f} J(z, \frac{\partial z}{\partial p})$$

Questo sistema costituisce l'approssimazione quasi geostrofica. Esso ha il vantaggio di "filtrare" le onde acustiche che si propagano con velocità maggiori di 100 m/sec che è la max velocità del vento geostrofico.

SCHEMI DI INTEGRAZIONE NUMERICA USATI IN METEOROLOGIA

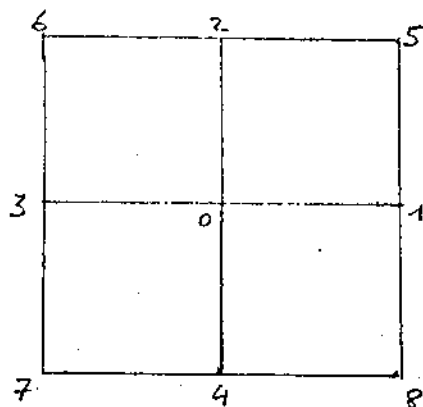
Si considerino due grandezze A, B. Per la Jacobiano possiamo scrivere:

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$$

che con ovvi passaggi può essere scritto come:

$$J(A, B) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial B}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial A}{\partial y} \right)$$

Per poterlo calcolare dobbiamo, dato un grigliato di punti, utilizzarlo ad esempio il metodo delle differenze finite (cfr "Esercizi"), escludere i punti di vertice 5,6,7,8, come in figura.



Questo porta con sé un errore di troncamento nel calcolo dello Jacobiano che a volte non è tollerabile. Per evitare ciò, possiamo pensare di calcolarlo facendo intervenire i valori al n° contorno, opportunamente mediati. L'espressione di questo tipo di Jacobiano, Jacobiano di Arakawa, ha la forma:

$$J = \frac{1}{2} (J^{++} + J^{+x} + J^{x+})$$

dove:

$$J^{++} = \frac{1}{4d^2} \left[(A_1 - A_3)(B_2 - B_4) - (A_2 - A_4)(B_1 - B_3) \right]$$

$$J^{*x} = \frac{1}{4d^2} \left[A_1(B_5 - B_8) - A_3(B_6 - B_7) - A_2(B_5 - B_6) + A_4(B_8 - B_7) \right]$$

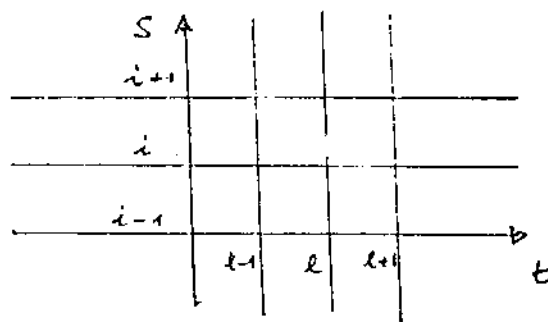
$$J^{x+} = \frac{1}{4d^2} \left[B_2(A_5 - A_6) - B_4(A_8 - A_7) - B_1(A_5 - A_6) + B_3(A_6 - A_7) \right]$$

Gli ultimi due termini dello Jacobiano di Arakawa contengono il valore di A e B nei punti di vertice che danno un ulteriore contributo al valore dello Jacobiano "semplice". In questo modo, inoltre si media lo Jacobiano classico con i valori del suo intorno e, diminuendo l'errore di troncamento, si prolunga il tempo dell'integrazione di calcolo, risolvendo l'instabilità non lineare. Si noti che in un processo di previsione come quello descritto a pag. 39 ad ogni nuova integrazione viene sommato l'errore preesistente in modo non controllabile.

Vengono riportati di seguito alcuni tra i più usati schemi di integrazione numerica. Si è già ripetutamente sottolineato il problema previsionistico, cioè la risoluzione di una equazione alle derivate parziali del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

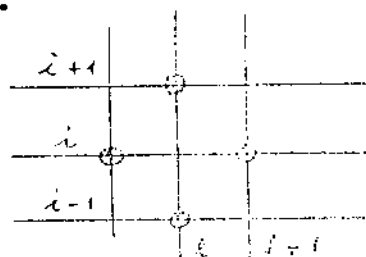
I dati a disposizione sono (cfr figura): i valori della grandezza U all'istante l e $l-1$ e per valori di coordinate i , $i-1$, si vuole prevedere il valore al tempo $l+1$ di U: U_i^{l+1} .



l = indice temporale
 i = indice spaziale

Gli schemi più usati sono:

- 1) Leap Frog: $U_i^{l+1} = U_i^{l-1} - \frac{A \Delta t}{2 \Delta x} (U_{i+1}^l - U_{i-1}^l)$ non conserva l'energia.



- 2) Diffusivo: $U_i^{l+1} = \frac{1}{2} \left[(U_{i+1}^l + U_{i-1}^l) - \frac{A \Delta t}{\Delta x} (U_{i+1}^l - U_{i-1}^l) \right]$ taglia le alte frequenze delle onde gravitazionali e acustiche.

- 3) Lax- Wendroff: $U_i^{l+1} = U_i^l - A \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (U_{i+1}^l - U_{i-1}^l) + 2 \frac{A \Delta t^2}{2 \Delta x} (U_{i+1}^l - 2U_i^l + U_{i-1}^l)$

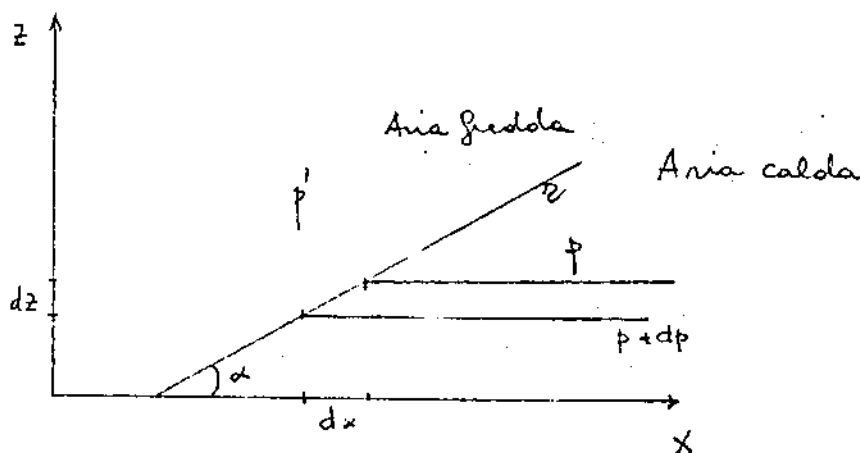
- 4) Implicito: $U_i^{l+1} = U_i^l - \frac{A \Delta t}{\Delta x} \left[(U_{i+1}^{l+1} - U_{i-1}^{l+1}) + (U_{i+1}^l - U_{i-1}^l) \right]$ molto stabile si può prendere un intervallo di integrazione maggiore.

FRONTI, SUPERFICI FRONTALI E FORMULA DI MARGUES

Immaginiamo di avere due masse d'aria di caratteristiche fisiche diverse: una "calda" e l'altra "fredda". Quando queste due masse d'aria vengono in contatto, tendono per un certo tempo a rimanere distinte; in realtà esiste uno strato di transizione di spessore molto minore delle dimensioni lineari della massa d'aria, quindi trascurabile; lo consideriamo come una superficie di separazione.

Possiamo visualizzare questo fenomeno immaginando due liquidi non miscibili posti in un recipiente sotto l'azione del campo gravitazionale. A causa di questo il liquido più denso si porterà più in basso ed esisterà una superficie di separazione parallela alla superficie terrestre.

Le due masse d'aria "calda" e "fredda", caratterizzate da valori diversi di p e T , a causa dell'effetto della rotazione terrestre, possono avere la superficie di separazione inclinata, la cui inclinazione è definita dal valore di α . (cfr. figura)



Consideriamo una situazione iniziale con l'aria stratificata orizzontalmente. In figura abbiamo indicato con r la traccia della superficie di contatto tra le due masse d'aria. Sulla superficie di discontinuità si avrà

$$p = p'$$

$$dp = dp'$$

Eseguendo i differenziali totali delle pressioni si ha:

$$(46) \quad dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$(47) \quad dp' = \frac{\partial p'}{\partial x} dx + \frac{\partial p'}{\partial z} dz$$

Sottraendo quindi la (47) dalla (46) otteniamo:

$$dx \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + dz \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = 0$$

Scriviamo ora la $\tan \alpha$ come:

$$(48) \quad \tan \alpha = dz/dx$$

otteniamo, introducendo la (48):

$$(49) \quad \tan \alpha = - \frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial z}}$$

Ricordando l'equazione dell'idrostatica:

$$(50) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g \quad \text{segue:} \quad \tan \alpha = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x}}{g(\rho - \rho')}$$

possiamo, considerando l'espressione del vento geostrofico

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{scrivere:} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = v_g \rho f$$

la (50) ponendo $\rho = \rho' = \rho_{medio}$ diventa:

$$(51) \quad \tan \alpha = \frac{v_g \rho_{medio} f - v_g' \rho' f}{g(\rho - \rho')} = \frac{f}{g} \frac{\rho_{medio}}{\rho - \rho'} (v_g - v_g')$$

Dall'equazione di stato per i gas perfetti $p = \rho R T$ da cui

$$p = \rho_m T_m R \quad \text{di conseguenza:} \quad \rho' = \frac{p}{R T'} \quad ; \quad \rho = \frac{p}{R T}$$

Allora $\frac{\rho_m}{\rho - \rho'}$ sarà uguale a:

$$(52) \quad \frac{1}{T_m} \frac{T'}{T} \approx \frac{T_m^2}{T_m} \frac{1}{T' - T}$$

Per la $\tan \alpha$ possiamo scrivere, sostituendo la 52 nella 51:

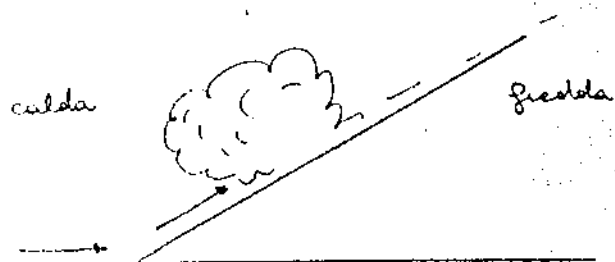
$$\tan \alpha = \frac{f}{g} \frac{v_g - v_g'}{T' - T}$$

FORMULA DI MARGULES

La formula di Margules ci dà un criterio per poter valutare il valore dell'inclinazione della superficie frontale. Questo dipende dal rapporto tra le differenze delle componenti del vento geostrofico parallele al fronte e le differenze delle temperature delle masse d'aria a contatto.

Dall'inclinazione possiamo determinare la mobilità del moto della massa. Per poter capire il perché di quanto affermato possiamo in rassegna alcuni dei possibili "fronti".

Fronti caldi



Osservando la figura a fianco si vede come l'aria calda, avanzando, spinga quella fredda antistante, essendo però quest'ultima più pesante obbliga quella calda a salire lungo la superficie frontale.

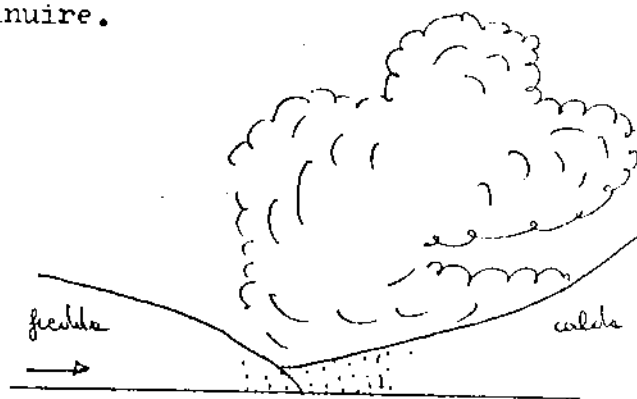
Lo scorrimento ascendente dell'aria, con conseguente abbassamento della temperatura, provoca la condensazione ad una certa quota del vapor d'acqua, quindi la formazione di sistemi nuvolosi.

Dal tipo di sistema nuvoloso possiamo dire qualche cosa sul grado di umidità e sulla stabilità dell'aria. Se essa è poco umida le nubi saranno scarse e le precipitazioni possono mancare; se è molto umida e stabile avremo nubi stratiformi e precipitazione a carattere continuo, se instabile, nubi cumuliformi o stratiformi con precipitazioni intermittenti o a rovesci.

La pressione con l'avanzare del fronte diminuisce con continuità (aria calda meno densa, che avanza) e dopo il passaggio del fronte continua a diminuire.

Fronti freddi

In questo caso l'aria fredda si incunea sotto l'aria calda antistante. L'aria calda in prossimità del fronte viene sollevata violentemente verso l'alto; abbiamo due tipi di comportamento del fenomeno a seconda che l'aria sia o non sia stabile: nel primo caso abbiamo una nuvolosità spessa che dà luogo a pioggia o a neve, nel secondo è presente una nuvolosità cumuliforme a forte sviluppo verticale che porta in genere, a violenti rovesci di pioggia, neve o grandine con temporali. La pressione diminuisce più o meno irregolarmente fino al passaggio del fronte, presentando poi un aumento molto veloce accompagnato a una diminuzione della temperatura, da un aumento della visibilità e da un rinforzo del vento.

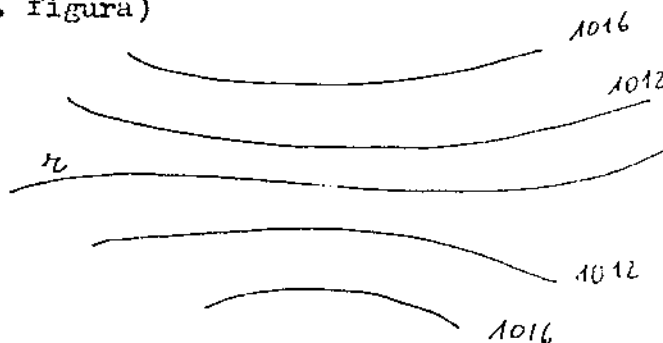


Fronti stazionari

Da notare da quanto è stato detto fino ad ora che un fronte avanza se i venti nella massa postfrontale sono diretti verso il fronte stesso. Devono essere disposti quindi in modo da intersecare le isobare. (cfr. figura)

Questo è infatti il solo caso possibile per avere, diretti come richiesto, i venti determinati dal campo barico.

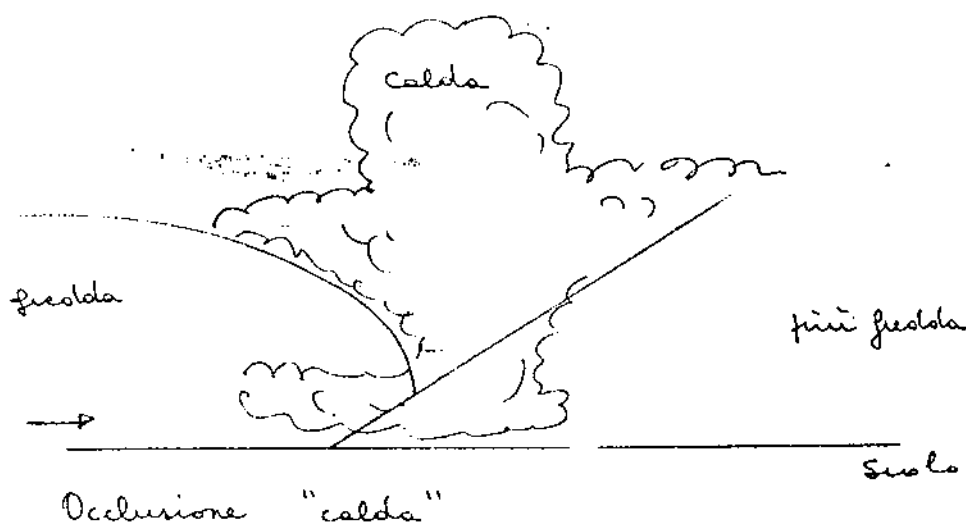
Se i venti sono paralleli o quasi al fronte, le masse d'aria si muoveranno l'una lungo l'altra senza che una riesca

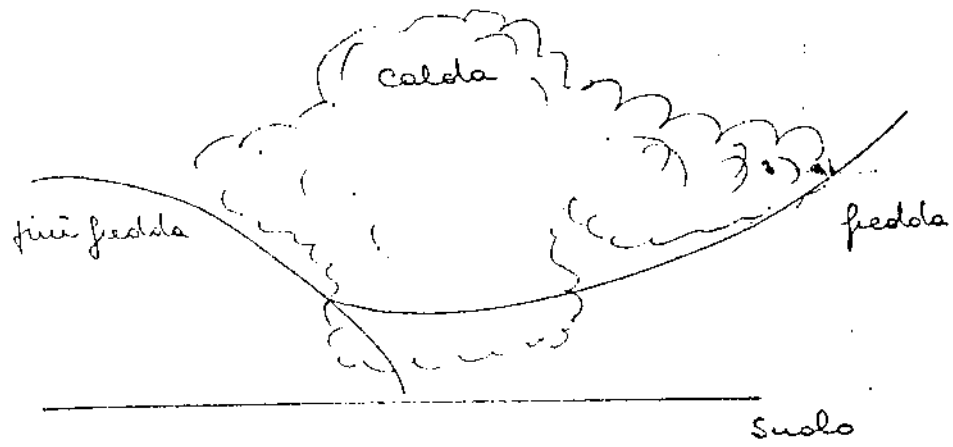


ed invadere decisamente la regione occupata dall'altra. Un tipo di fronte come quello descritto prende il nome di fronte stazionario.

Fronti occlusi

Quando un fronte freddo e un fronte caldo si sovrappongono, ha luogo la formazione di un fronte occluso. Data la maniera con cui si produce, l'occlusione viene definita da tre masse d'aria diverse: due di queste adiacenti ed entrambe fredde sono a contatto con la superficie terrestre, l'altra calda "galleggia" al di sopra. Le due masse fredde sono quelle che, in accordo con quanto già detto, prima che il fronte freddo raggiunga quello caldo avanzano rispettivamente dietro al primo e davanti al secondo. L'aria calda è quella che prima era compresa tra i due fronti. Possono presentarsi due tipi di occlusioni a seconda che, delle due masse fredde presenti, quella posteriore abbia una temperatura maggiore o minore dell'altra. Nel primo caso si chiama occlusione a carattere di fronte caldo (occlusione calda), nel secondo caso occlusione a carattere di fronte freddo (occlusione fredda). (cfr. fig.)





Occlusione "fredda"

APPENDICE A

La turbolenza

INTRODUZIONE

Nello studio fatto sinora, le equazioni della meteorologia sono state applicate a moti su larga scala. I moti considerati, in realtà, sono delle medie, anche se è difficile precisare in modo esatto il processo di media effettuato. Si può dire comunque che si tratta di medie su distanze orizzontali di 200-300 km, su altezze di circa 1 km, su tempi di circa 1 ora. In questo modo vengono quindi trascurati i moti su piccola scala. E' proprio di questi moti su piccola scala, che vogliamo occuparci trattando della turbolenza, al fine di chiarire l'aspetto fisico e di darne una formulazione matematica "ragionevole" e utile ai fini applicativi.

Sappiamo sperimentalmente che ponendo a contatto masse di aria (o di qualsiasi altro gas), con caratteristiche fisiche differenti (ad esempio diversa temperatura o umidità o velocità) dopo un tempo più o meno lungo, si avrà mescolamento delle masse d'aria e progressivo livellamento delle caratteristiche fisiche. Il mescolamento avviene per effetto dei moti su piccola scala. Tali moti sono di due tipi: moti molecolari e moti turbolenti.

I moti molecolari sono noti da tempo e il loro studio, pur basato su modelli molto semplici, ha portato ad introdurre alcuni coefficienti di viscosità e di conduzione, che poi sono risultati essere delle costanti tipiche del gas in esame. In realtà i moti molecolari non sarebbero assolutamente sufficienti a produrre un mescolamento così rapido come quello osservato sperimentalmente. Anzi essi possono essere trascurati in tutti i problemi relativi alla turbolenza. Infatti lo scambio prodotto dai moti turbolenti è 5 o 6 ordini di grandezza maggiore rispetto a quello molecolare.

Per quanto riguarda i moti turbolenti si è cercato dapprima di studiarli in modo analogo a quanto si era fatto con i moti molecolari. Si è visto ben presto però che non era possibile determinare delle costanti analoghe ai coefficienti di scambio molecolare, ma che i coefficienti di scambio turbolento mostravano grosse variazioni anche in relazione alla scala del fenomeno considerato. Questo è d'altronde abbastanza ragionevole, se si tiene conto che nello studio del moto turbolento si fa riferimento ai vortici, cioè a delle entità piuttosto difficili da valutare fisicamente nelle loro esatte caratteristiche. Di qui la necessità di ricorrere, per uno studio accurato, a concetti e strumenti statistici e matematici molto evoluti.

Concludiamo questa breve introduzione ricordando che lo studio della diffusione turbolenta nell'atmosfera è indispensabile in moltissimi problemi, soprattutto la diffusione di calore, vapore, o di qualsiasi altra sostanza come ad esempio gli inquinanti.

I. FORMULAZIONE MATEMATICA

Indicando con A una delle componenti della velocità, ovvero la temperatura o il contenuto di vapore di una certa massa d'aria, possiamo dire che in generale vale una relazione del tipo:

$$dA / dt = B \quad (1)$$

dove B contiene termini diversi e rappresenta in un certo senso le "sorgenti" di A . Ad esempio se A è la velocità, B rappresenta la forza, se A è la temperatura, B può essere la radiazione, etc. Dato che come accennato, noi applichiamo queste equazioni al moto medio, ottenuto mediando sullo spazio o sul tempo o su entrambi, indicando con una barra una qualsiasi di queste medie, possiamo scrivere:

$$\overline{(dA / dt)} = \overline{B} \quad (2)$$

che sviluppata dato che A è funzione di x, y, z e t , ci dà:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} + v \frac{\partial A}{\partial y} + w \frac{\partial A}{\partial z} = B \quad (3)$$

Quello che ci interessa è vedere se questa relazione dipende solo dai valori medi del moto considerato o se in essa entrano anche le componenti del moto turbolento. A questo scopo trasformiamo la (3) usando l'equazione di continuità che scriviamo nella forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

Sviluppiamo il secondo termine ed otteniamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Notiamo che anche questa equazione si riferisce a valori medi sia della densità, sia delle componenti della velocità e quindi possiamo mettere la solita barra su tutti i termini. Moltiplicando la (5) per A e la (3) per ρ e sommando otteniamo:

$$\overline{\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(\rho u A)}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\rho v A)}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial(\rho w A)}{\partial z}} = \overline{\rho B} \quad (6)$$

Questa equazione si chiama spesso "momentum equation" poiché contiene le componenti del momento per unità di volume

$$\rho \mu, \rho v, \rho w.$$

Introduciamo ora il moto turbolento. Infatti perché la (6) sia utile dovremo esprimerla in termini delle grandezze medie, cioè di quelle che possiamo misurare in pratica. D'altronde le grandezze medie sono legate ai valori "istantanei" o turbolenti dalle relazioni

$$\begin{aligned} u' &= u - \bar{u} \\ v' &= v - \bar{v} \\ w' &= w - \bar{w} \\ A' &= A - \bar{A} \end{aligned} \quad (7) \quad \begin{aligned} &\text{dove } u', v', w', A' \text{ sono le grandezze} \\ &\text{del moto turbolento, definito pro-} \\ &\text{prio come la differenza tra il moto} \\ &\text{"reale" e quello medio.} \end{aligned}$$

Le differenze tra moto medio e moto "totale" ("reale") sono da attribuirsi proprio alla diffusione turbolenta.

Per semplificare la trattazione, si fanno in genere alcune ipotesi:

- a) consideriamo trascurabili le variazioni della densità rispetto a quelle della velocità
- b) assumiamo come valor medio del moto turbolento lo zero
- c) assumiamo che i prodotti delle grandezze medie e turbolente siano trascurabili sulla media.

Notiamo che le tre ipotesi sono abbastanza ragionevoli dal punto di vista fisico, in quanto la prima è comprovata da numerose misure e le altre due implicano che il moto medio varia molto lentamente e questo nei "range" considerati è abbastanza "vero".

Sostituendo allora nella (6) ai valori di u, v, w, A le espressioni corrispondenti date dalle (7), e tenendo conto delle ipotesi fatte otteniamo:

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B} - \left[\frac{\partial(\bar{\rho} u' A')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho} v' A')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho} w' A')}{\partial z} \right] \quad (8)$$

Dividendo per $\bar{\rho}$ e ponendo $F_x = \bar{\rho} u' A'$; $F_y = \bar{\rho} v' A'$; $F_z = \bar{\rho} w' A'$ (8bis)

si ha
$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B} - \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \quad (9)$$

Quello che è subito evidente, è che $\bar{A}$ è influenzato non soltanto dagli effetti del valor medio $\bar{B}$, ma anche dagli effetti dei moti vorticosi F_x, F_y, F_z .

Queste particolari grandezze di cui cercheremo ora di capire il significato "fisico", si chiamano: "flusso turbolento". Così F_x è il flusso turbolento della grandezza A nella direzione x e analogamente F_y e F_z .

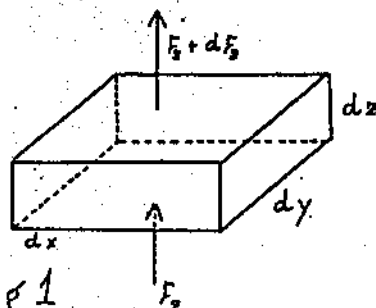
Il flusso turbolento - o vorticoso - medio di A in una direzione è definito come l'ammontare di $m \cdot A$ trasportato dai vortici verso quella direzione, in un secondo, attraverso una superficie perpendicolare alla direzione data ed unitaria. (m rappresenta la massa, dato che A la definiamo come una grandezza "specificata", cioè per unità di massa)

Così ad esempio, il flusso verticale di umidità è la massa di vapor d'acqua trasportata dai vortici attraverso un'area orizzontale unitaria nell'unità di tempo. Se consideriamo l'unità di volume (cioè una massa uguale a $\bar{\rho}$) la quantità di vapore contenuta sarà $\bar{\rho} \cdot q$, dove q è l'umidità specifica. Il volume di aria trasportata verticalmente dai vortici attraverso un cm^2 è $w \cdot 1$. Il flusso verticale medio del vapor d'acqua è $\bar{\rho} w' q$, cioè proprio F_z se $A = q$. Infatti poste $q = \bar{q} + q'$ e tenuto conto che q' ha valor medio uguale a zero, il flusso verticale è $F_z = \bar{\rho} w' q'$. In modo analogo il flusso di qualsiasi quantità A in ogni direzione è dato da espressioni della forma $\bar{\rho} w' A'$; $\bar{\rho} v' A'$; $\bar{\rho} u' A'$. (Queste si chiamano "componenti di Reynolds del flusso")

Vediamo più in dettaglio il significato del flusso turbolento. Consideriamo il parallelepipedo di fig. 1, con

dimensioni dx, dy, dz . Se il flusso verticale attraverso la base è maggiore di quello attraverso la sommità (cioè se $dF_z < 0$) la concentrazione media di $\bar{A}$

nel volume cresce. Analogamente se $dF_z > 0$ $\bar{A}$ diviene minore. Quindi al flusso turbolento di una grandezza può cambiare, se non è uniforme, la concentrazione di tale



grandezza. Possiamo calcolare questo cambiamento. Attraverso la base si ha un flusso pari a $F_z dx dy$. Attraverso la sommità il flusso è dato invece da $(F_z + dF_z) dx dy$. Il guadagno netto sarà allora di:

$$-dF_z dx dy = -\frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz. \text{ Infine il guadagno per unità di massa si trova dividendo per } \rho. \text{ Alla fine abbiamo:}$$

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (10)$$

Questo ci giustifica la (9), dove vediamo proprio che $\bar{A}$ può cambiare per effetto sia di B , sia di un gradiente di flusso verticale. Possiamo scrivere la (9) nella forma:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{F} \quad (11)$$

Quindi se il flusso turbolento converge in un volume, la concentrazione di $\bar{A}$ cresce e viceversa.

L'uso della (11) comporta che il flusso turbolento venga messo in relazione con le principali variabili ovvero venga espresso in funzione di x, y, z , e t . In realtà il problema è molto complesso e non si è trovata finora nessuna relazione semplice tra il flusso e le coordinate.

La più semplice e comune ipotesi, consiste nel porre il flusso turbolento di $\bar{A}$ proporzionale al gradiente di $\bar{A}$ e

scrivere quindi: $F_x = -\mu_x \frac{\partial \bar{A}}{\partial x}$; $F_y = -\mu_y \frac{\partial \bar{A}}{\partial y}$; $F_z = -\mu_z \frac{\partial \bar{A}}{\partial z}$ (12)

Qui μ_x, μ_y, μ_z sono i così detti "coefficienti di scambio" turbolento.

Le (12) si possono giustificare in modo empirico, tenendo conto del fatto che ponendo in contatto due masse di aria, si ha una evoluzione dalla situazione a) alla situazione b) della fig. 2. Quindi il vapore deve essere trasportato da sinistra verso destra, cioè il flusso del vapore deve essere nella direzione del gradiente.

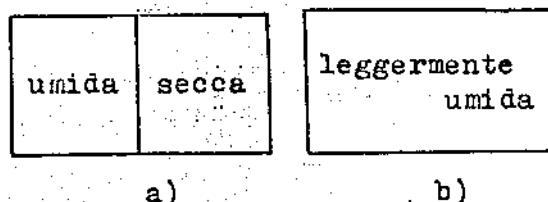


fig. 2

In realtà questo argomento è valido solo se si ha conservazione della quantità considerata, cioè nel caso della fig. 2 se non si ha né condensazione, né evaporazione.

Inoltre nelle (12) sono implicite diverse ipotesi limitative che cercheremo di evidenziare esponendo un metodo per arrivare alle espressioni di F_x, F_y, F_z .

Definiamo come flusso di $\bar{A}$ (considero solo il flusso verticale) la quantità di A trasportata per unità di tempo attraverso una sezione unitaria, cioè

$$F_z = - \frac{d\bar{A}}{dt ds_z} \quad (13)$$

Se ci mettiamo ad una certa quota $z = \text{cost}$, avremo un flusso attraverso una superficie Δs_z posta a questa quota, dovuto a masse d'aria che salendo o scendendo la attraversano. Se la massa che sale è m_A e quella che scende è m_B si avrà $d\bar{A} = \sum m_A \bar{A}_A - \sum m_B \bar{A}_B$ (14), dove $\bar{A}_A$ ed $\bar{A}_B$ sono i valori di $\bar{A}$

alle quote da cui "provengono" le masse. (ed ecco una prima ipotesi molto limitativa: le masse d'aria provenienti dalle rispettive quote con concentrazioni $\bar{A}_a$ ed $\bar{A}_o$, non si mescolano con l'aria circostante fino a che non arrivano alla quota z)

Notiamo che la sezione attraverso cui studiamo il flusso deve essere "grande" rispetto alle dimensioni delle masse. Quindi dalla (13) e (14) si avrà:

$$F_z = \frac{\sum m_a \bar{A}_a - \sum m_o \bar{A}_o}{\Delta t \Delta S_z} \quad (15) \quad \left[\begin{array}{l} \text{siamo passati dagli} \\ \text{integrali alle somma-} \\ \text{torie} \end{array} \right]$$

Facciamo ora l'ipotesi (ed è la seconda!) che $\bar{A}$ sia funzione continua e derivabile della quota. In questo caso

$$\begin{aligned} \bar{A}_a &= \bar{A}_{\bar{z}} - \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \right) (\bar{z} - z_a) \\ \bar{A}_o &= \bar{A}_{\bar{z}} + \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \right) (z_o - \bar{z}) \end{aligned} \quad (16)$$

sostituendo queste espressioni nella (15) e supponendo (terza ipotesi) che il numero delle masse che salgono sia uguale a quello delle masse che scendono per cui $\sum m_a = \sum m_o$, si ottiene

$$F_z = - \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \right)_{\bar{z}} \cdot \frac{\sum m_a (\bar{z} - z_a) + \sum m_o (z_o - \bar{z})}{\Delta t \Delta S_{\bar{z}}} \quad (17)$$

Possiamo conglobare in una unica somma sia le masse ascendenti che quelle discendenti ed ottenere (ponendo $\bar{z} - z_a = l_i$, $z_o - \bar{z} = l_i$)

$$F_z \approx - \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \right)_{\bar{z}} \cdot \frac{\sum m_i l_i}{\Delta t \Delta S_{\bar{z}}} \quad (18)$$

Passiamo alla notazione differenziale e chiamando l'espressione $\frac{\sum m_i l_i}{\Delta t \Delta S_{\bar{z}}}$ col nome di μ_z otteniamo proprio la terza delle (12) cioè $F_z = -\mu_z \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \right)_{\bar{z}}$.

Mediante la posizione (12) possiamo riscrivere la (9) sotto la forma che viene normalmente usata in molte applicazioni

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_z \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \right) \right] \quad (19)$$

Dato che normalmente i gradienti verticali sono assai più grandi di quelli orizzontali, se μ_x, μ_y, μ_z sono dello stesso ordine di grandezza (e questo è vero tranne casi particolari, come quando si tratta come moto medio la circolazione generale e come turbolenza i cicloni), solo la parte in z va considerata e otteniamo

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_z \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \right) \quad (20)$$

L'uso di questa equazione si scontra con diverse difficoltà, soprattutto si deve tener conto che μ_z non è necessariamente lo stesso per diverse grandezze $\bar{A}$.

Per concludere questa parte mostriamo come la (20) "interpreti" bene il fatto fisico che la turbolenza livella i valori di $\bar{A}$, cioè riduce i massimi e aumenta i minimi. Infatti differenziando otteniamo:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{B} + \frac{\mu_z}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \frac{\partial \mu_z}{\partial z} \quad (21)$$

In ogni punto in cui $\bar{A}$ ha un massimo, risulta $\partial \bar{A} / \partial z = 0$ e quindi il secondo termine della (21) vale zero. Dato che $\partial^2 \bar{A} / \partial z^2$ è negativo ai punti di massimo, l'azione della turbolenza produce un $\frac{d\bar{A}}{dt}$ negativo cioè $\bar{A}$ decresce nei punti di massimo.

L'inverso nei punti di minimo. Così la descrizione matematica corrisponde a quella fisica del processo.

II. L'ATTRITO - IL VENTO

Consideriamo l'equazione (20) dove ora poniamo al posto di $\bar{A}$, le componenti della velocità del vento. In questo caso, dato che B è la grandezza che produce cambiamenti in A senza alcuna turbolenza, $\bar{B}$ sarà la somma delle forze (nella direzione x se $\bar{A}$ è la componente della velocità lungo l'asse x). Ponendo allora $\bar{A} = \bar{u}$, la (20) diventa:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = f\bar{v} - \frac{1}{f} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \quad (22)$$

In questa equazione abbiamo trascurato l'attrito molecolare.

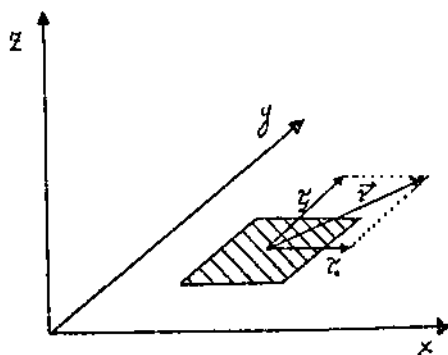
L'ultimo termine, prodotto dalla turbolenza, descrive le forze di attrito "vorticoso" e "turbolento". In questo caso il coefficiente di scambio si chiama coefficiente di viscosità turbolenta. In modo analogo se $\bar{A} = \bar{v}$ otteniamo:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -f\bar{u} - \frac{1}{f} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (23)$$

Il valore di μ_z non è necessariamente lo stesso nelle due relazioni, ma si suppone che lo sia nei primi 1000 metri circa. In quanto primo strato dell'atmosfera (detto "strato di attrito") i tre termini a destra della (22) e della (23) sono dello stesso ordine di grandezza, cioè la forza di attrito è dello stesso ordine di grandezza della forza di Coriolis e del gradiente di pressione. Al di sopra dello strato di attrito, il termine dovuto alla turbolenza è di almeno un ordine di grandezza minore degli altri due. Nella equazione riguardante la terza componente della velocità, cioè $\bar{w}$, il termine di attrito è probabilmente sempre minore della forza di gravità, per cui l'equazione rimane, in pratica, l'equazione dell'idrostatica. Dato che la velocità del vento cresce con la quota (e quindi i termini $\mu_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ e $\mu_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ crescono anch'essi con la quota), gli ultimi termini della (22) e della (23) sono negativi e quindi l'atmosfera è rallentata in senso dell'attrito.

Si può calcolare che l'attrito, se non ci fossero nuovi apporti di energia, condurrebbe l'atmosfera all'equilibrio in un tempo di ~ 2 settimane. E' questo il motivo per cui si trascura l'attrito turbolento per le previsioni sulle 24 ore. E dato che l'energia dissipata per attrito deve essere bilanciata, in tempi lunghi, dalla radiazione solare, ciò vuol dire che la radiazione solare non potrebbe accelerare l'atmosfera dalla quiete al suo moto attuale in meno di due settimane. Questa è la ragione per cui possiamo trascurare nelle previsioni su 24 ore anche la radiazione solare.

Chiamiamo ora le quantità $\mu_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ e $\mu_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ rispettivamente τ_x e τ_y ed introduciamo il vettore "stress" di cui τ_x e τ_y sono le componenti orizzontali. Questo vettore ha le dimensioni di forza per unità di superficie (le stesse di una pressione). Va notato però che la pressione agisce normalmente all'area mentre lo stress ha il significato di una forza tangenziale. In particolare τ_x e τ_y agiscono su un'area orizzontale.



Quindi il vettore $\vec{\tau} = \hat{i} \tau_x + \hat{j} \tau_y$ ci dà la forza che il vento esercita sull'area unitaria orizzontale. In particolare è la forza con cui il vento "spinge" il terreno (o la superficie del mare, provocando le correnti).

Lo stress, al suolo, agisce lungo la direzione del vento, è proporzionale al quadrato della velocità del vento, dipende dalla rugosità del terreno.

Per capire come lo stress sia prodotto dalla turbolenza si può ragionare in questo modo: l'effetto della turbolenza è

di trasportare il momento medio, che normalmente è maggiore in alto, verso il basso, e quindi è la turbolenza che produce la sintonia orizzontale sul terreno. Ricordando che:

$$F_z = -\mu_z \frac{\partial \bar{H}}{\partial z} \quad \text{e che abbiamo definito } \tau_z = \mu_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

e $\tau_y = \mu_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$, vediamo che lo stress non è altro che flusso verso il basso dei momenti medi in direzione x ed y rispettivamente (basta sostituire $\bar{A}$ con $\bar{u}$ e $\bar{v}$ e ricordare che la velocità cresce con la quota). Questo flusso è prodotto dalla turbolenza, dato che il moto verticale ^{medio} vicino al terreno è piccolo.

Vediamo ora come varia il vento con la quota. Anzi tutto combiniamo le equazioni (22) e (23) in una unica equazione vettoriale, moltiplicando la prima per $\vec{i}$, la seconda per $\vec{j}$ e sommando:

$$\frac{d\vec{V}_2}{dt} = f\vec{V}_2 \times \vec{k} - \frac{1}{\rho} \nabla_z p + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} \quad (24)$$

dove l'indice 2 vuol dire semplicemente che consideriamo le prime due componenti (x ed y) del vento e del ∇ .

Si può fare una stima dello stress partendo dalla (24), dove tutti gli altri termini sono dello stesso ordine di grandezza, e vedere come lo stress nei primi dieci metri varia di meno del 10%. Dato che questa variazione è piccola rispetto a quella di altri parametri, si considera lo stress costante entro i primi dieci metri. Questo primo strato si chiama "surface boundary layer".

Vediamo come varia il vento nel s.b.l.. Possiamo scrivere

$$\vec{\tau} = \mu_z \frac{\partial \vec{V}_2}{\partial z} \quad (25)$$

Dato che $\vec{\tau}$ ha direzione costante nel s.b.l. e dato che μ_z è uno scalare, la (25) implica che la direzione di $\partial \vec{V}_2 / \partial z$, cioè dello "shear" del vento, è la stessa del vento. Quindi nel

s.b.l. il vento non ruota con l'altezza.

La variazione (del modulo) della velocità del vento, dipende dalla variazione di μ_z con l'altezza. Generalmente in atmosfera neutra, si pone

$$\mu_z = a (z + z_0) \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} a &= \text{costante} \\ z &= \text{quota} \\ z_0 &= \text{lunghezza d'attrito} \end{aligned} \quad (26)$$

z_0 è la così detta lunghezza d'attrito, che dipende dalla rugosità del terreno, e va inserita nella (26) per tenere conto del fatto che anche a quota $z = 0$ non si ha mai turbolenza nulla. Normalmente z_0 vale da 1/30 a 1/10 degli elementi di rugosità. (varia più o meno dal cm al metro). Dalla (26), inserita nella (25), otteniamo

$$\vec{V}_z = \frac{\vec{V}}{a} \ln \frac{z + z_0}{z_0} \quad (27)$$

che ci dà la variazione del vento con la quota, nel "surface boundary layer", in condizione di atmosfera neutra. Questa formula, dove $a = 0.4 \sqrt{|\vec{V}|} \zeta$ (sperimentale), è limitata come utilità dato che non sempre l'atmosfera è neutra. Per tenere conto della stabilità, si usa spesso la formula

$$\vec{V}_z = \frac{\vec{V}}{a(1-\beta)} \left[\left(\frac{z + z_0}{z_0} \right)^{1-\beta} - 1 \right] \quad (28)$$

dove β tende a 1 in atmosfera neutra e vale 0.80 per le inversioni e 1.25 per grossi gradienti termici. In realtà anche la (28) è troppo complicata per alcuni sviluppi teorici e spesso si approssima l'andamento del vento con un profilo esponenziale del tipo:

$$\frac{|\vec{V}_z|}{|\vec{V}_1|} = \left(\frac{z}{z_1} \right)^2 \quad (29)$$

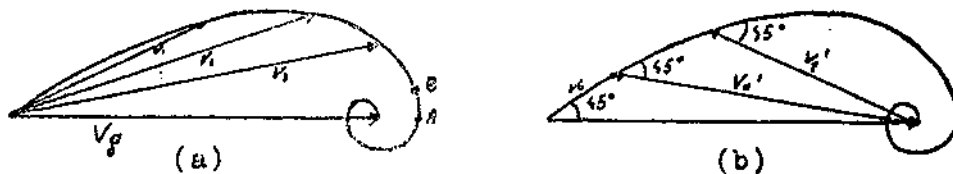
dove si assume che a non vari con l'altezza (entro certi spessori), ma si fa spesso variare con la stabilità.

Accenniamo ora all'andamento del vento nel "planetary boundary layer", cioè nello strato dove la superficie della

terra ha un effetto apprezzabile sul moto dell'aria. Questo strato, detto pure strato di attrito, ha uno spessore che dipende dall'intensità del vento geostrofico e dalla rugosità (roughness) del terreno, ma in genere arriva a 800+1000 metri. La descrizione matematica più nota è basata su una soluzione delle (22) e (23) con le seguenti ipotesi:

- 1- μ e γ sono costanti con l'altezza
- 2- non ci sono accelerazioni
- 3- il vento geostrofico è costante con la quota, o al più, è una funzione lineare della quota.

La distribuzione risultante è la spirale di Ekman, indicata nella figura seguente dove (a) mostra l'andamento dell'intensità e (b) dell'angolo col vento geostrofico in funzione dell'altezza.



Le caratteristiche della spirale di Ekman sono:

- 1- Il vettore differenza $\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_g$, decresce in modo esponenziale con l'altezza;
- 2- L'angolo tra $\vec{V}'$ a qualsiasi altezza e $\vec{V}'_0$ alla superficie è proporzionale all'altezza
- 3- L'angolo tra la linea che unisce la punta dei vettori $\vec{V}$ e $\vec{V}'$ è 45° a tutte le altezze
- 4- L'angolo tra le isobare (o il vento geostrofico) e il vento alla superficie è $\leq 45^\circ$

Come conseguenza, ci sono dei livelli, come quello indicato dal punto B, dove il vento reale supera il vento geostrofico. Nel punto A il vento è per la prima volta parallelo al V_g .

Il livello corrispondente al punto A si chiama livello del "vento di gradiente" o del "vento geostrofico". Qui il vento reale supera V_g solo del 2-4%.

Anche se esiste una spirale o qualcosa di simile, è chiaro che nella realtà le cose sono più complesse. Ad esempio non possono esserci livelli dove $V > V_g$.

III. EVAPORAZIONE

a) Misura della evaporazione.

La turbolenza non influenza direttamente l'evaporazione. Comunque, una volta che l'acqua è evaporata, la turbolenza può trasportare via il vapor d'acqua. In questo modo è possibile l'evaporazione di una maggiore quantità di acqua. Perciò più turbolenza vuol dire più evaporazione.

La situazione più semplice è anche la più importante: quella di una grande distesa di acqua orizzontale. In questo caso il flusso di aria umida è verticale, verso l'alto quando l'umidità specifica media diminuisce con l'altezza, e verso il basso nel caso contrario. Ora, il vapore non si raccoglie immediatamente sopra la superficie dell'acqua, subito dopo la evaporazione. Piuttosto esso continuerà a muoversi verso l'alto. L'ammontare della evaporazione, quindi, determina anche il flusso verso l'alto dell'aria umida, almeno per piccole distanze sopra la superficie. Qui entra in gioco la turbolenza.

Per la (12) il flusso verticale è:

$$E = -\mu_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (30)$$

Qui ora μ_z si chiama diffusività turbolenta. E rappresenta sia la evaporazione, sia il flusso verticale di miscela aria-vapore. Ora, le osservazioni vicine al suolo, indicano che la diffusività turbolenta ha lo stesso valore della viscosità turbolenta. Le prima si può determinare dalla (25). questa relazione contiene lo stress, che si trova mediante la (27), da misure di vento, sia assumendo $z_0 = 0.6$ cm, sia eliminando z_0 tra due relazioni di questo tipo, esprimendolo in termini del vento ai due livelli. Seguendo la seconda alternativa, la (30) si può scrivere:

$$E = -0.25 \rho \frac{(\bar{q}_2 - \bar{q}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)}{[\ln(z_2/z_1)]^2} \quad (31)$$

Qui $\bar{u}_1$ ed $\bar{u}_2$ sono le velocità del vento ai due livelli,

e $\bar{q}_1$ e $\bar{q}_2$ sono le umidità specifiche agli stessi livelli. La difficoltà con la (31) è che essa richiede una precisione eccessiva nelle misure di umidità. Si sono usate espressioni più semplici del tipo $E = c(\bar{q}_s - \bar{q}_1) \bar{u}_1$, dove c è una costante e sia il vento, sia l'umidità vengono misurate ad un livello fisso. $\bar{q}_s$ è l'umidità specifica di saturazione, e si può assumere che sia nota. Si è avuto un certo successo nella determinazione empirica della costante c , ma si devono usare valori diversi per venti diversi. La determinazione teorica di c si scontra con la mancata conoscenza del primo strato di pochi mm.

L'evaporazione si può misurare anche determinando direttamente il flusso di "Reynolds" della miscela $\overline{\rho q'w'}$. Il metodo è stato poco usato perché richiede misure di umidità troppo frequenti.

Altri metodi di misura della evaporazione non coinvolgono la teoria della turbolenza. (alcuni si basano su misure dirette, altre su considerazioni energetiche)

a) Proprietà della evaporazione

La (30) mostra che la evaporazione è proporzionale al gradiente di umidità. Essa è pure proporzionale alla diffusività viscosa, che cresce con il vento, come si può vedere esaminando le (26) e (27), ed identificando la viscosità turbolenta con la diffusività turbolenta, si ottiene infine:

$$E = -\rho(z - z_0) \frac{\bar{u}}{\ln \frac{z + z_0}{z_0}} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (32)$$

la (32) mostra che l'evaporazione è proporzionale al gradiente verticale di umidità e al vento, ad una determinata quota. Quantitativamente la (32) sopravvaluta l'evaporazione datoché trascura lo strato limite molecolare.

Altre proprietà della evaporazione si possono descri-

vere usando la (20) con $\bar{q}$ al posto di $\bar{A}$:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial z} \mu_s \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (33)$$

Per esempio possiamo pensare ad un flusso di aria che passa su una superficie di acqua nella direzione delle x , con velocità $\bar{u}$. In questo caso si ha $d\bar{q}/dt = \bar{u} \partial \bar{q} / \partial x$. L'equazione si può allora risolvere assumendo per μ_s ed $\bar{u}$ una variazione esponenziale con l'altezza, e che l'aria debba rimanere saturata in cima. Risulta dalla distribuzione di $\bar{q}$ così calcolata:

$$E = -\mu_s \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}$$

Il limite di E , allora, quando $z \rightarrow 0$ rappresenta l'evaporazione.

Tra le altre cose, si vede che l'evaporazione non è semplicemente proporzionale al fetch del vento sul lago o sul mare, datoché la massa d'aria muovendosi sull'acqua, diventa sempre più saturata e può quindi "assorbire" sempre meno acqua. Sutton calcola che E sia proporzionale al fetch elevato ad $8/9$. Questo ci induce a non trarre conclusioni sulla E per grossi specchi d'acqua, partendo da misure su piccole quantità. (se il fetch cresce 512 volte E cresce solo di 256)

N.B. Per fetch si intende l'area su cui soffiava il vento e si dice un fetch di una certa lunghezza per intendere che il vento soffiava sul mare (o su ogni altra superficie) per quella certa lunghezza.

IV. CONDUZIONE TURBOLENTA DI CALORE

- a) Relazione tra il flusso di calore ed il gradiente di temperatura

Dato che le variazioni di temperatura sono più pronunciate in senso verticale, il flusso di calore è più pronunciato in tale direzione. Benché molto importante nello strato di attrito il calore può arrivare molto più in alto. Per semplificare definiamo (in modo poco ortodosso) il calore per unità di massa $h = + c_p \Theta$. Dato che Θ è conservativa allora il flusso verticale è dato da: (vedi (12))

$$H = - c_p \mu_z \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}$$

Qui $c_p \mu_z$ si chiama conduttività turbolenta. Eliminando la temperatura potenziale mediante l'equazione di Poisson usando la legge dei gas e la legge dell'idrostatica si ha:

$$H = - c_p \mu_z \frac{\bar{\Theta}}{T} (\gamma_a - \gamma) \quad (34)$$

dove γ_a = gradiente adiabatico secco e γ = gradiente reale. La (34) stabilisce che il flusso di calore verso l'alto si ha con gradiente superadiabatico e verso il basso con situazione stabile. Se l'aria è satura al posto di γ_a va il gradiente di aria umida, premesso che l'evaporazione nell'aria avviene quando questa si muove verso il basso. In un temporale questo è abbastanza vero, sicché il calore viene trasportato verso il basso quando il gradiente è tra secco ed umido.

- b) Flusso di calore nel boundary layer

In genere le maggiori fonti o i maggiori assorbimenti di calore si hanno alla superficie. Di giorno la maggior parte della radiazione solare viene assorbita dal suolo e deve essere trasportata in alto dai vortici. Di fatto, i vortici in genere sono controllati dai processi di riscaldamento e dalla

conseguente instabilità. Tale turbolenza è classificata come convezione per contrapporla a quella meccanica, che può essere prodotta dal vento che soffia su una superficie rugosa in atmosfera stabile o neutra. Per molti scopi, non è indispensabile distinguere tra i due tipi di turbolenza. Comunque sembra ora chiaro che la convezione produce vortici di periodo maggiore rispetto alla turbolenza meccanica. Di giorno, la funzione di tutti i tipi di vortici è di trasportare calore dalla superficie verso l'alto. Invece, di notte, la turbolenza trasporta calore verso il basso. Naturalmente questo secondo processo è molto meno efficiente, dato che la turbolenza viene ostacolata dalla stratificazione stabile notturna. Se la notte è ventosa, la turbolenza meccanica trasporta calore verso il basso, ma se l'aria è calma e non c'è turbolenza meccanica, è difficile vedere come la turbolenza possa semplicemente svilupparsi. Il flusso verticale durante le notti calme è interamente dovuto al "rovesciamento" di grosse masse d'aria prodotto dopo che è diventato grande lo shear verticale del vento, così questo "rovesciamento" potrebbe spiegare l'improvviso riscaldamento in alto durante le notti calme.

Dato che il calore trasportato verso l'alto di giorno non si accumula subito sopra la superficie, ma diffonde verso livelli più alti, il flusso verticale di calore si può considerare costante nel s.b.l.. Se poniamo μ , uguale sia per la conduzione termica, sia per quella di vapore, è possibile scrivere:

$$\frac{H}{LE} = \frac{C_p}{L} \frac{\bar{\theta} - \bar{\theta}_s}{\bar{q} - \bar{q}_s} \quad (35)$$

dove L è il calore

latente di condensazione. Per ottenere la (35) non si sono fatte particolari ipotesi sulla distribuzione verticale di μ .

La (35) permette di trovare la velocità del flusso di calore ed evaporazione misurando l'umidità e la temperatura alla superficie ed a un'altro solo livello. Se la superficie è l'oceano, la temperatura è sufficiente a determinare l'umidità, e quindi basta una sola misura di temperatura: la differenza tra $\bar{T} - \bar{T}_s$ e $\bar{\theta} - \bar{\theta}_s$ è trascurabile al suolo. La velocità del flusso di calore o dell'evaporazione è importante per alcune misure di evaporazione.

La misura diretta del flusso di calore è più difficile. Un metodo consiste nello stimare il "flusso di calore di Reynolds" sostituendo ad A' la quantità $c_p \bar{\theta}'$ nella equazione (8 bis). Così, il flusso verticale di calore, viene posto uguale a:

$$H = c_p \int \bar{\theta}' w' \quad (36)$$

dato che le variazioni turbolente della pressione sono relativamente piccole, T' si può sostituire a θ' nella (36). Così i risultati ottenuti con la (36) saranno sempre più piccoli del flusso di calore determinato con altri metodi.

Il flusso di calore si può determinare anche in altri modi:

- 1) da considerazioni energetiche

- 2) applicando direttamente la (34) e assumendo che μ_z per la conduzione del calore è la stessa della viscosità turbolenta. La viscosità turbolenta, d'altronde, si può stimare da due osservazioni di vento e dalle (25) e (26).

b) Variazioni diurne della temperatura a diverse altezze

Se mettiamo $c_p \bar{\theta}$ al posto di $\bar{A}$ nella (20), otteniamo:

$$c_p \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \bar{B} + \frac{c_p}{f} \frac{\partial}{\partial z} \mu_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (37)$$

Qui $\bar{B}$ indica tutte le sorgenti (positive e negative) come radiazione o calore aggiunto o rimosso da condensazione ed eva-

posizione.

Nella atmosfera, direttamente sopra la superficie, il trasporto di calore dato dalla radiazione è piccolo rispetto al trasporto dovuto alla turbolenza (eccetto le regioni polari e notti chiare e calme). Se non c'è evaporazione o condensazione la (37) rappresenta una equazione differenziale in $\bar{\theta}$:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial z} \mu_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (38)$$

Se possiamo trascurare l'advezione, $d\bar{\theta}/dt$ diventa $\partial\bar{\theta}/\partial t$. Allora, se μ_z non è funzione né dell'altezza né del tempo la (38) è la classica equazione della conduzione di calore con $\bar{\theta}$ sostituito a T. Sotto queste condizioni, la (38) facilmente porta alle variazioni diurne della temperatura a diverse altezze data la variazione vicino al suolo.

Se la variazione di temperatura è sinusoidale, si sviluppa un ritardo nel massimo della temperatura che è proporzionale all'altezza. Quanto più grande è μ_z , cioè il mescolamento, tanto più piccolo è il ritardo. La ampiezza della variazione diurna di temperatura decresce esponenzialmente con l'altezza. Quanto più è grande μ_z , tanto più è piccola la diminuzione. Se il trasporto turbolento di calore fosse l'unico trasporto, la variazione diurna sopra un km. sarebbe molto piccola. Ogni variazione diurna osservata dovrebbe essere dovuta ad un assorbimento diretto della radiazione o ad errori di misura.

La teoria si può estendere in diverse direzioni senza molte difficoltà:

- 1) La variazione di temperatura al suolo non deve essere necessariamente sinusoidale. Una variazione qualunque può sempre essere trattata mediante analisi armonica.
- 2) Il coefficiente di scambio μ_z può essere una funzione lineare dell'altezza. Allora la variazione verticale dell'andamento di T, è qualitativamente simile a quella descritta.

ci sono però differenze quantitative. Per esempio, la variazione verticale viene in questo caso descritta da una funzione di Bessel. Si sono ottenute soluzioni anche per $\mu_z = a z^m$.

- 3) Il coefficiente di scambio può essere una funzione sinusoidale con periodo di 24 ore. Questo tipo di variazione è abbastanza realistica dato che μ_z ha un minimo di notte ed un massimo di giorno. Le fluttuazioni di temperatura alle diverse altezze sono più sinusoidali, ma distorte. Per esempio il massimo in alto si ha subito dopo il massimo al suolo, e il minimo si ha molto tempo dopo il minimo al suolo. Purtroppo il problema non si può risolvere in modo più accurato, ponendo μ_z come funzione del gradiente. In tal caso la (38) diventerebbe non lineare e finora non si sono trovate soluzioni periodiche. D'altronde è certamente sbagliata l'ipotesi che non ci sono variazioni negli scambi advettivi, soprattutto in certi luoghi come coste marine e regioni montane.

P A R T E I

Elementi di meteorologia dinamica

Esercizi e complementi

CALCOLO DELLE VELOCITA' VERTICALI

Ricordiamo l'espressione della divergenza orizzontale:

$$\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Supponiamo di conoscere a differenti quote $\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}$; attraverso l'equazione di continuità calcoleremo la corrente verticale media.

Vista l'equazione di continuità nel sistema x, y, z :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

poiché per un fluido incompressibile $\frac{d\rho}{dt} = 0$, si ha:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Integrando rispetto a z dal suolo ($z=0$) otteniamo:

$$\int dw = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \int dz$$

dove si è introdotto il valore medio della divergenza. Si ha ancora:

$$(1) \quad W(z) - W(z_0) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (z - z_0)$$

Si suppone, se il moto è orizzontale, $W(0) = 0$.

Ad esempio si abbiano i seguenti valori per la

$z(m)$	$\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{v}$
0	$1.0 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$
1500	$0.5 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$
3000	0.2 " "
5500	0.0 " "
9000	-0.4 " "
16000	-0.9 " "

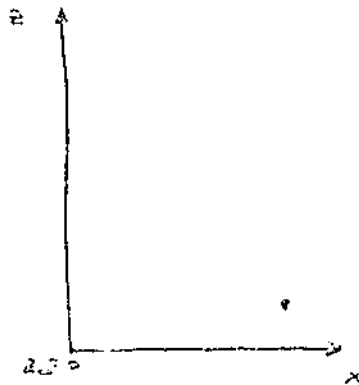
Applicando la (1) avremo allora:

$$W(1500) = - \frac{-1.5}{2} \times 1500 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1} \text{ m} = -1.12 \times 10^2 \text{ m sec}^{-1}$$

$$W(z_2) - W(z_1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{z_1 \rightarrow z_2} (z_2 - z_1)$$

Otteniamo procedendo in questo modo tutti i valori di $w(z)$.

Quale sarà l'andamento qualitativo delle correnti verticali, alla luce dei risultati ottenuti? Si chiede al lettore di disegnare le linee di corrente su di un grafico del tipo x, z :



CARTE METEOROLOGICHE

Le carte meteorologiche correntemente usate sono di due tipi: le carte al suolo e le carte in quota. Una carta meteorologica in genere rappresenta il campo scalare della temperatura e della pressione ed il campo vettoriale del vento. Bisogna notare tuttavia la differenza fondamentale tra una carta cosiddetta "al suolo" ed una "in quota".

La carta al suolo riporta i valori della pressione e della temperatura al livello del mare e vi si possono tracciare delle isobare, unendo i punti di uguale pressione. La carta in quota è la rappresentazione del campo della temperatura e del vento ad una certa pressione. Esistono infatti carte cosiddette "a 700 mb", a "a 500 mb", ecc. intendendo cioè che si mantiene costante la p invece della z come accadeva con la carta al suolo. la carta perciò riporta, oltre ai valori già detti, anche il valore della quota della superficie isobarica rispetto cui è tracciata. Unendo i punti di uguale quota z si ottengono delle linee isoaltimetriche o topografiche. E' ovvia l'utilità di questa rappresentazione quando si usa un sistema di riferimento x, y, p invece di x, y, z .

I valori della T e p e direzione del vento (da notare che queste sono solo alcune delle grandezze meteorologiche riportate sulla carta) vengono registrati o da stazioni meteorologiche, carte al suolo, o da palloni sonda, carte in quota.

Tracciamento di carte

Per facilitare il tracciamento manuale delle isobare o

delle isoaltimetriche è necessario usare alcuni accorgimenti:

a) unendo i punti di uguale pressione (per esempio 1000mb in una carta al suolo) bisogna non fare capitare all'interno dell'isobara contemporaneamente valori di pressione maggiore e minore (per esempio 1004 e 996 mb). Lo stesso dicasi per carte in quota, dove al posto della pressione vi sono i valori della quota.

b) prestare attenzione a che due linee non si incrocino.

c) abbiano la configurazione più regolare possibile.

E' consigliato tracciare le isobare o le isoaltimetriche partendo da quelle più vicine ad una zona di perturbazione in quanto si sa che queste sono sicuramente linee chiuse, mentre non è detto che lo siano, date le dimensioni limitate del territorio coperto dalla carta, quelle più esterne.

Nota.

I valori della pressione sono riportati in alto a destra delle singole stazioni e al numero che vi si legge bisogna premettere la cifra 10 se il numero non supera il valore di 30+40, altrimenti bisogna far precedere il numero dalla cifra 9. I valori sono riportati in mb. Altri dati per ogni stazione sono: temperatura e temperatura di rugiada, in basso da sinistra a destra in °C, il vento, di cui è data la direzione di provenienza e l'intensità attraverso delle barrette poste perpendicolarmente all'astina che determina la direzione del vento: ogni mezza barretta rappresenta 5 nodi, la barretta intera 10 nodi, la banderuola 50 nodi. Sulle carte in quota le z vengono espresse in m/100.

CALCOLO DEL VENTO GEOSTROFICO E METODO DELLE DIFFERENZE FINITE

Abbiamo due possibili espressioni da cui ricavare le componenti u_g e v_g del vento geostrofico:

$$(2) \quad \begin{cases} v_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u_g = \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (2') \quad \begin{cases} v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} \\ u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

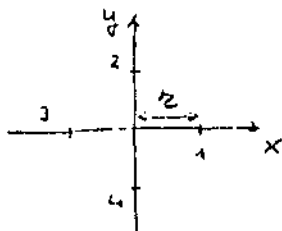
Da notare che il sistema (2) è da usarsi in un sistema di riferimento x, y, z , ricavando il valore del gradiente dalle carte al suolo; mentre le (2') sono comode per una rappresentazione x, y, p , quindi con carte in quota.

Per svolgere l'esercizio, tracciamo, seguendo la procedura descritta, delle isobare o delle isocalitmetriche. Il nostro scopo è quello di ottenere attraverso la risoluzione dei sistemi (2) e (2'), le componenti del vento geostrofico al suolo e a 500mb.

I due sistemi da risolvere contengono equazioni alle derivate parziali. Le calcoleremo con il metodo detto "delle differenze finite".

Metodo delle differenze finite

Si consideri un riferimento cartesiano x, y su cui individuiamo i punti 1, 2, 3, 4. Sia r la distanza in modulo di cias-



uno dei quattro punti dall'origine; se definiamo una funzione $P(x, y)$, differenziabile continua e derivabile fino all'ordine n , si dice differenza non centrata di P rispetto ad x la approssimazione:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0} \approx \frac{P(1) - P(0)}{h}$$

e differenza centrata di P rispetto ad x la:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0} \approx \frac{P(1) - P(-1)}{2h}$$

Per stabilire quale delle due espressioni consenta una maggiore approssimazione, sviluppiamo in serie di Taylor la P nei punti 1 e 3:

$$(3) \quad P(1) = P(0) + h \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_{x=0} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right)_{x=0} + \dots$$

$$(4) \quad P(-1) = P(0) - h \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_{x=0} - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right)_{x=0} + \dots$$

da (3) si ottiene:

$$\frac{P(1) - P(0)}{h} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0} + \frac{h}{2!} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_{x=0} + \frac{h^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right)_{x=0} + \dots$$

da cui trascurando i termini di ordine superiore al primo:

$$\frac{P(1) - P(0)}{h} \approx \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0}$$

da (3) e da (4) si ottiene invece:

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2h} = \frac{1}{2h} \left[h \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0} + 0 + 2 \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right)_{x=0} \right]$$

Notiamo dunque che, utilizzando l'approssimazione alle differenze centrate, si trascurano solo termini di ordine superiore al secondo, mentre nelle differenze non centrate si trascurano tutti i termini di grado superiore al primo. Utilizzeremo per l'esercizio il metodo delle differenze centrate.

Svolgimento esercizio: (1975-76)

Sulle due carte, tracciate le isobare e le isoaltimetriche, sovrapponiamo un grigliato, del tipo in fig. 1. Per ora consideriamo solo la carta al suolo. Si faccia attenzione a sovrapporre esattamente il punto $J = 5$, $I = 1$ del grigliato al punto di coordinate geografiche 50° Lat N e 10° E.

In ogni punto individuato dal grigliato è possibile ottenere le informazioni che ci servono del campo di pressione, per una carta in quota l'altezza delle superficie isobarica (per es. 500 mb). Fatto ciò si riportano i valori della pressione in una tabella del tipo di fig. 4.

d è la distanza tra un punto e l'altro, fissata per l'esercizio in 200×10^3 cm. u_g e v_g sono le componenti del vento geostrofico ottenuti dai valori riportati sulle carte.

Un esercizio che si potrebbe svolgere sulle carte in quota è quello del calcolo dello "shear" del vento su tre livelli, per esempio 700, 600, 500 mb secondo il seguente schema:

		momento		shear del vento		numero di Richardson	Energia cinetica	
u	v	$u \times v$	$\frac{du}{dz}$	$\frac{dv}{dz}$	$\frac{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2}}{(\frac{d\vec{v}}{dz})^2} = Ri$		$u^2/2$	$v^2/2$
700								
600								
500								

2.12.12

GRIGLIATO
d = 200 x 10³ m

J=1 J=2 J=3 J=4 J=5 J=6 J=7 J=8

50° LAT N

← d →

I=1

I=2

I=3

I=4

I=5

I=6

I=7

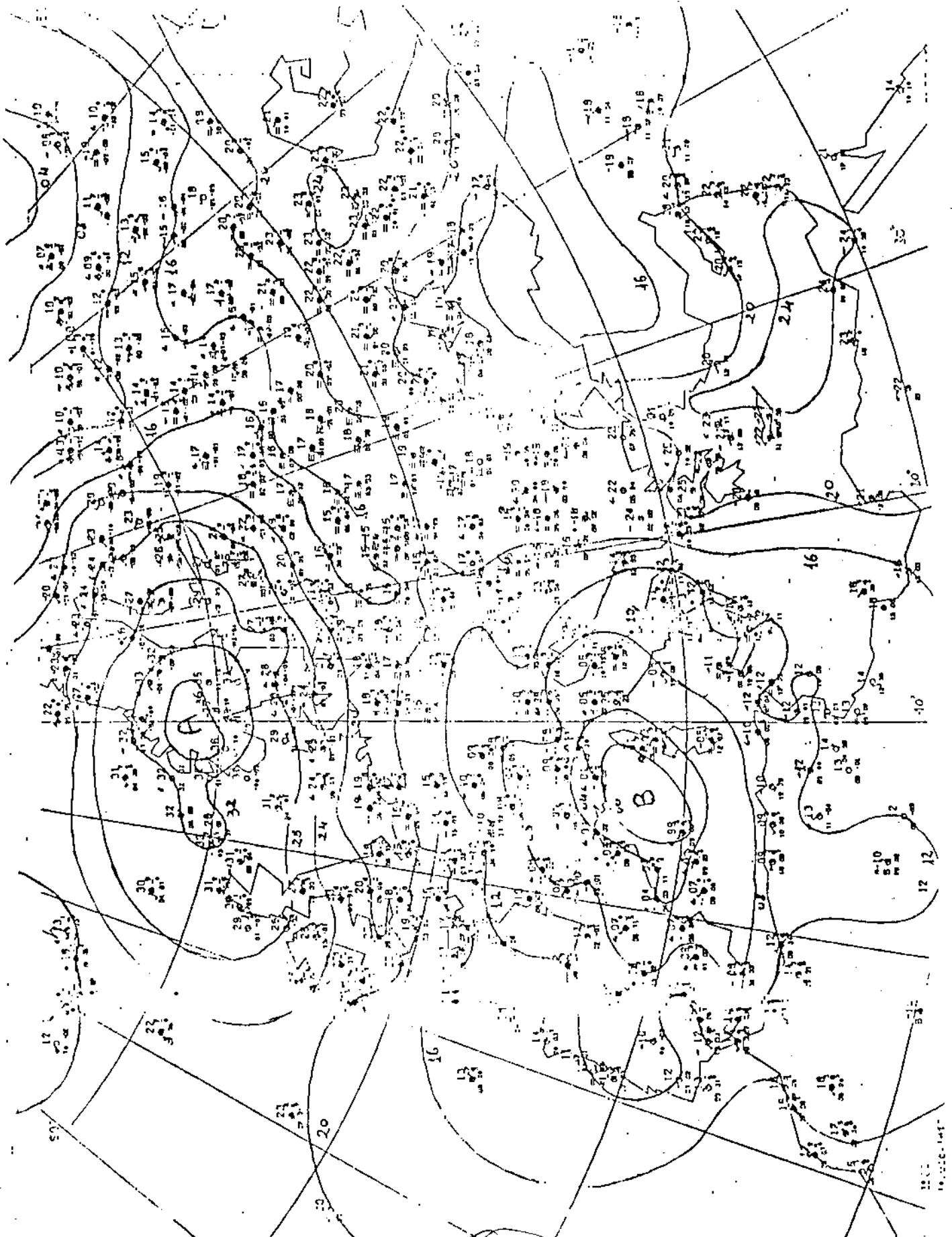
$$\frac{x_2}{d_2} \frac{f_1}{f_2} = n$$

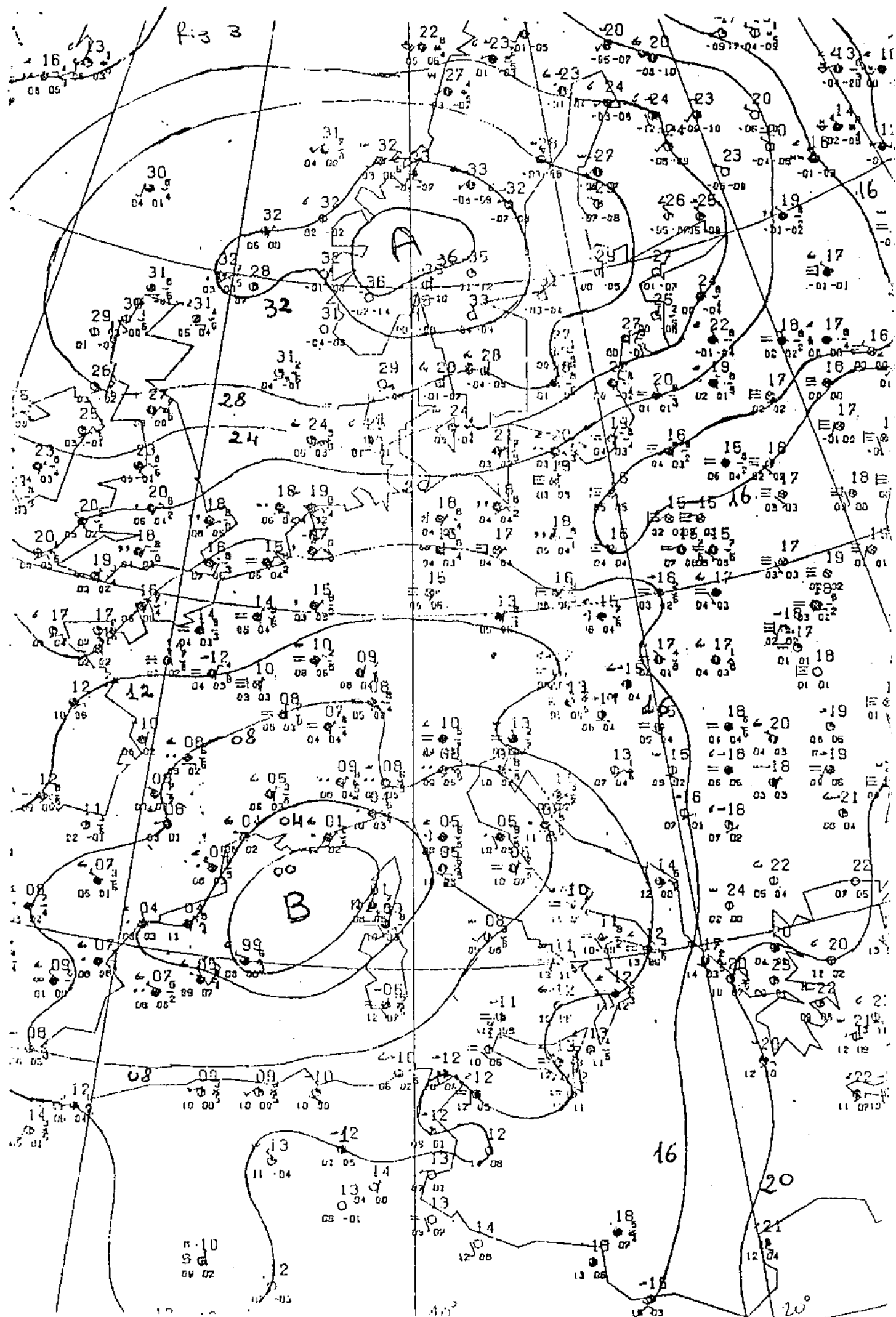
$$\frac{h_2 f_1}{d_2} = n$$

f3 L

10° E

X





(v)

(vi)

(vii)

		$P_N - P_S$		$P_E - P_W$		$P_N - P_S$		$P_E - P_W$		$\frac{1}{P}$		$\frac{1}{P_f}$		u_f		v_f		u	
		$\frac{P_N - P_S}{d(=2u \cdot d)}$		$\frac{P_E - P_W}{d(=2u \cdot d)}$		$\frac{1}{P}$		$\frac{1}{P_f}$		$\frac{1}{P}$		$\frac{1}{P_f}$		u_f		v_f		u	
I	J	P_N	P_E	P_S	P_W	$P_N - P_S$	$P_E - P_W$	$P_N - P_S$	$P_E - P_W$	$\frac{1}{P}$	$\frac{1}{P_f}$	$\frac{1}{P}$	$\frac{1}{P_f}$	u_f	v_f	u	v	u	v
3	2	11	07	06	11	5	-5	2.5	-2.5	1	10	1	10	-25	25	4	-3	4	-3
3	3	09	07	04	08	5	-1	3	-0.5					-30	-5	-1	-1	-1	-1
3	4	07	07	00	07	7	0	3.5	0					-35	0	-2	-4.5	-2	-4.5
3	5	10	08	03	07	6	1	3	0.5					-30	5	-5	-1	-5	-1
4	2	08	04	05	09	3	-5	1.5	-2.5					-15	-25	-7	-7	-7	-7
4	3	07	00	00	05	7	-6	5.5	-3					-35	-30	-4.1	-4.9	-4.1	-4.9
4	4	07	03	03	04	4	0	2	0					-20	0	+4.6	-2	+4.6	-2
4	5	07	05	05	00	2	5	1	2.5					-10	25	+4.3	-2	+4.3	-2
5	2	05	00	07	08	6	-8	3	-4					-30	-40	-7.5	-7	-7.5	-7
5	3	04	02	07	05	2	-3	1	-1.5					-10	-15	-7.5	-7	-7.5	-7
5	4	00	05	07	00	-2	+5	-3.5	+2.5					35	25	0.5	0	0.5	0
5	5	03	08	07	02	-4	+7	-2	+5.5					20	35				

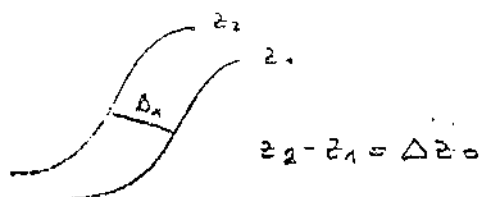
Realizzazione di un regolo per il calcolo del vento geostrofico

Ricordando le equazioni del vento geostrofico in x, y, p , ponendoci in un riferimento che abbia l'asse y coincidente con la velocità $\vec{v}$ del vento, si ha:

$$v_y = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x}$$

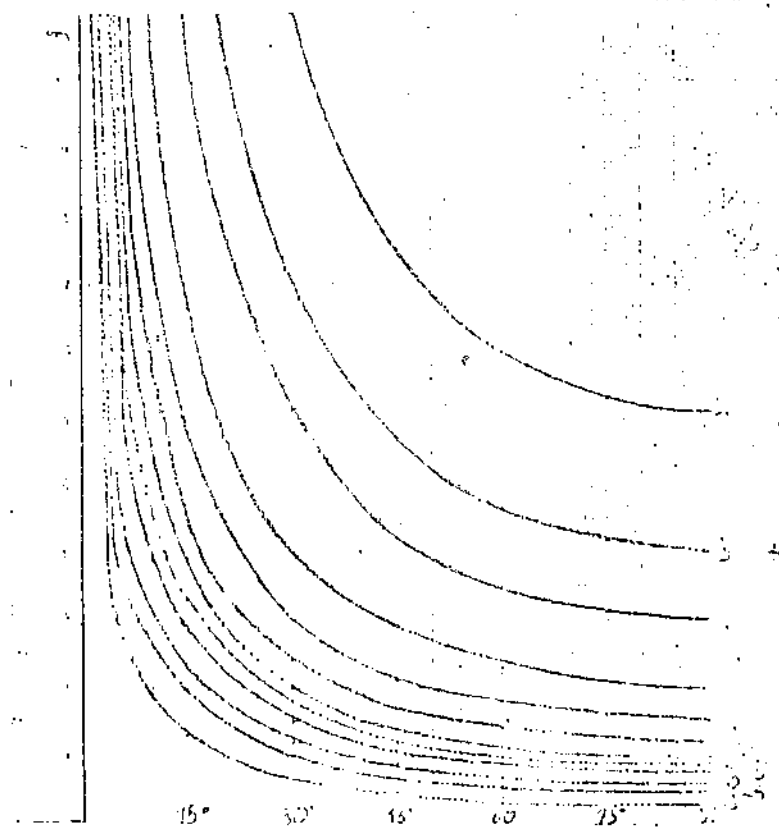
Il nostro scopo è quello di costruire un regolo che ci permetta di valutare la velocità del vento geostrofico in funzione di φ e di una elaborazione di dz ; infatti non potremo conoscere dz/dx ma solo le differenze finite $\Delta z/\Delta x_0$. Δx_0 viene posto $\Delta x_0 = 3 \cdot 10^5$ m che ci garantisce un buon campionamento della perturbazione extratropicale la cui lunghezza caratteristica è $L \sim 10^6$ m. Vediamo di valutare Δz a partire dalla carta delle isolinee, dove abbiamo Δz_0 fisso (stabilito al momento del disegno) e Δx variabile, (cfr figura), mentre noi abbiamo deciso di mantenere fisso $\Delta x = \Delta x_0$; potremo quindi assumere in prima approssimazione che fra due isolinee l'andamento della topografia sia lineare e quindi scrivere:

$$\Delta z = \Delta x'_0 \frac{\Delta z_0}{\Delta x}$$



dove $\Delta x'_0$ è Δx_0 calcolato nella scala della carta come distanza tra due isolinee.

Disegneremo così sul regolo in funzione di φ e x , una famiglia di curve v_g utilizzando la (5) e la (6), dimodo che ponendosi alla latitudine φ alla quale si vuole conoscere v_g e muovendosi verticalmente fino all'ordinata Δ_x troveremo un punto per il quale dovrebbe passare la curva v_g cercata; se così non fosse sarebbe facile estrapolare questo valore dalle v_g vicine.

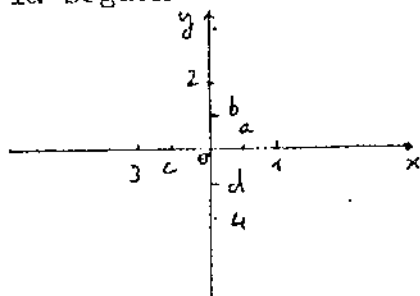


CALCOLO DELLA VORTICITA' E OPERATORE DI LAPLACE IN DIFFERENZE FINITE.

Ricordiamo l'espressione della vorticità relativa geostrofica:

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{g}{f} \nabla^2 z$$

Per ricavare la ζ_g è necessario risolvere dunque un'equazione alle derivate seconde. Il metodo impiegato è ancora quello delle differenze finite. Per ogni punto in cui si voglia calcolare la ζ si avrà la seguente situazione:



Ovviamente sarà:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_a = \frac{z_1 - z_0}{\Delta}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_c = \frac{z_0 - z_3}{\Delta}$$

dove Δ è la distanza tra 0 e 1. Da cui

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{\frac{z_1 - z_0}{\Delta} - \frac{z_0 - z_3}{\Delta}}{\Delta} = \frac{z_1 + z_3 - 2z_0}{\Delta^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{z_2 + z_4 - 2z_0}{\Delta^2}$$

Scriveremo dunque:

$$\nabla^2 z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 4z_0}{\Delta^2}$$

L'esercizio viene svolto per i punti 6, 7, 10, 11 del grigliato in fig. 5 pag. 16, con $\Delta = 300$ Km.

I valori sono:

$$z(5) = 5590$$

$$z(9) = 5625$$

$$z(2) = 5405$$

$$z(10) = 5555$$

$$z(14) = 5625$$

$$z(6) = 5430$$

$$z(3) = 5425$$

$$z(7) = 5385$$

$$z(11) = 5495$$

$$z(8) = 5495$$

$$z(12) = 5520$$

$$z(15) = 5605$$

Punto (6)

$$\nabla^2 z = 2.38 \times 10^{-9}$$

$$\zeta = \frac{g}{F} \nabla^2 z$$

Punto (7)

$$\nabla^2 z = 3.27 \times 10^{-9}$$

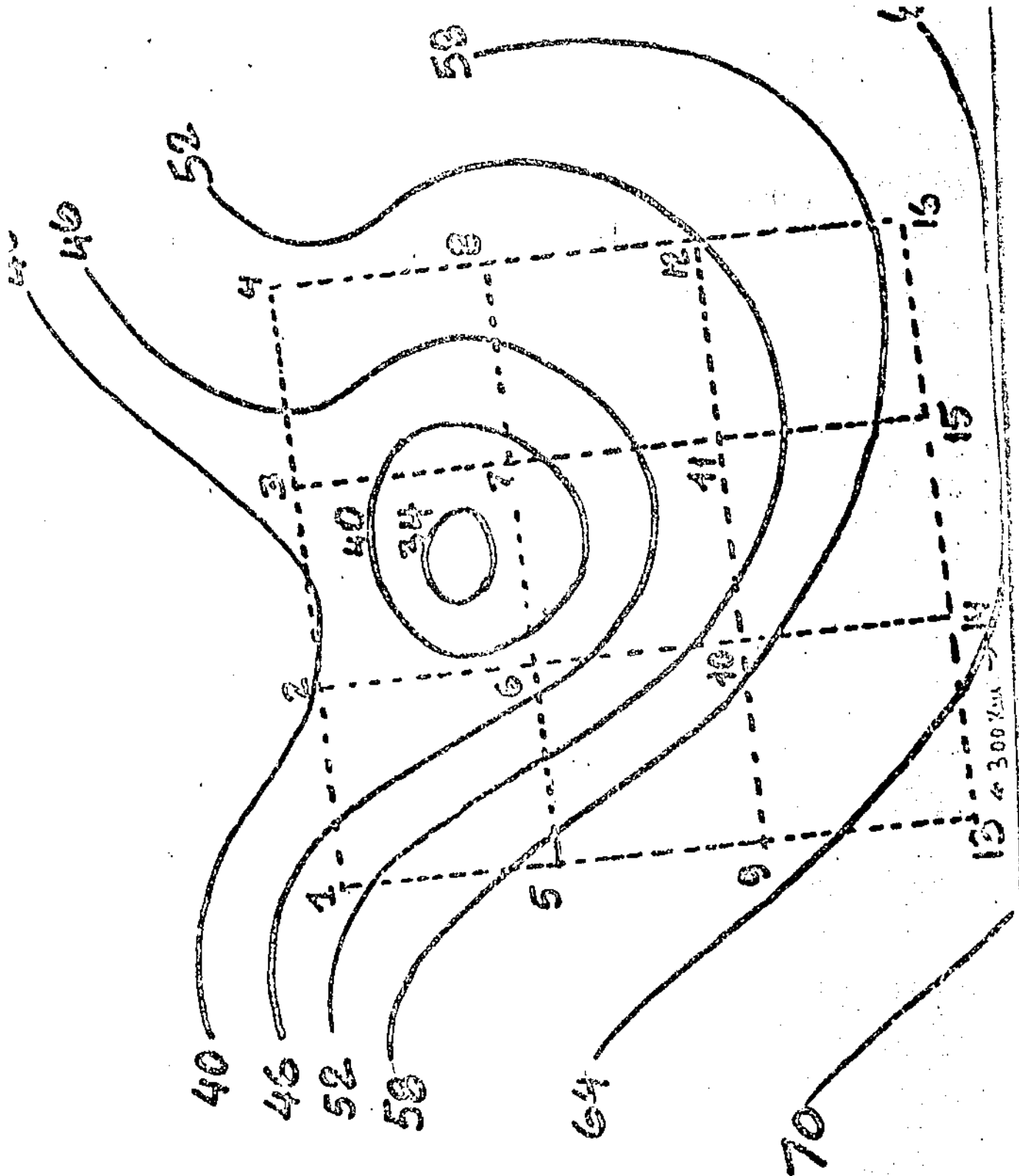
Punto (10)

$$\nabla^2 z = -5 \times 10^{-10}$$

Punto (11)

$$\nabla^2 z = 9.44 \times 10^{-10}$$

Fig. 5



INVERSIONE DI UN LAPLACIANO : UN METODO DI " RELAXATION ".

Il problema consiste nel trovare una soluzione ad una equazione del tipo $\nabla^2 z = k$, noto k , volendo trovare la z che la soddisfa. È un problema che si presenta molto spesso in meteorologia, quando per esempio, noto il campo della vorticità, si vuole risalire al valore della z , partendo da una situazione del tipo mostrato in figura:

z	z	z	z	z
z	∇_1^2	∇_2^2	∇_3^2	z
z	∇_1^2	∇_2^2	∇_3^2	z
z	∇_1^2	∇_2^2	∇_3^2	z
z	z	z	z	z

Nei punti interni del reticolo è noto il valore di $\nabla^2 z$. Ci si propone di determinare la z nei punti interni, che soddisfi le date condizioni al contorno. Si farà uso di un metodo detto di "Relaxation" o di rilascio, costituito essenzialmente da un processo iterativo convergente.

Poiché la "Relaxation" è un metodo iterativo, bisogna identificare l'ordine di approssimazione. Indichiamo con z^p il valore previsto ("guess") di z dopo la p -esima iterazione; poiché il metodo è convergente z^p deve essere uguale al valore vero di z per $p \rightarrow \infty$.

Costruiamo un reticolo del tipo in figura:

	11-1	11-2	11-3
11-1	11-1	11-2	11-3
11-2	11-1	11-2	11-3
11-3	11-1	11-2	11-3

assegnando ad ogni punto una coordinata m, n . Indichiamo il primo "guess" con $z^0_{m,n}$. Ricordando quanto svolto nel capitolo precedente si ha:

precedente si ha:

$$(7) \quad d^2 v^2 z = z_{m+1,n}^0 + z_{m-1,n}^0 + z_{m,n+1}^0 + z_{m,n-1}^0 - 4z_{m,n}^0 - z_{m,n}^0$$

dove $R_{m,n}^*$ è il residuo ("residual") che una misura della differenza tra il "guess" iniziale e la soluzione vera. Possiamo in ogni punto ridurre il residuo a zero sostituendo a $z_{m,n}^*$ il valore $z_{m,n}^1$ definito da

$$z_{m,n}^{-1} = z_{m,n}^0 + \frac{1}{4} R_{0,m,n}^0$$

come si può verificare sostituendo 2ω in (7), lasciando invariati i valori negli altri punti. Applicando la (7) in tutti gli altri punti interni, avremo un nuovo campo di Applicando nuovamente la (7) dopo un numero ν di cicli si otterrà l'azzeramento dei residui e quindi la conoscenza della situazione interna.

Si noti comunque che quando è stato trovato un nuovo "guess" in un dato punto i nuovi valori sono usati per modificare i residui nei punti vicini. Si procede in questo

modo: partendo dal punto $(1, 1)$ e andando fino al punto $(M-1, 1)$ passando poi alla riga successiva e lavorando dal punto $1, 2$ al punto $M-1, 2$ come in figura.

146

8 NUMERICAL PREDICTION

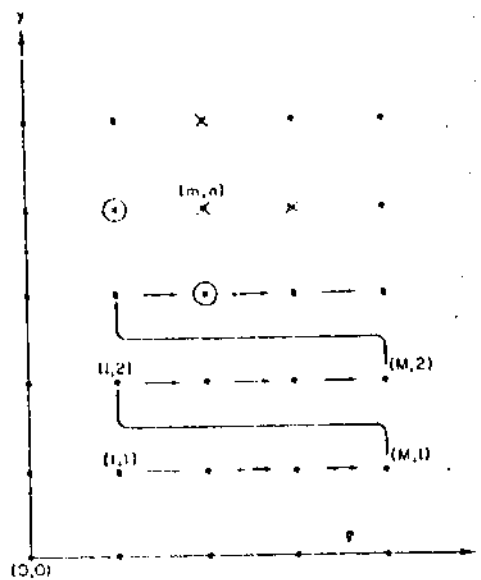


Fig. 8.10 Arrangement of grid for successive relaxation. Arrows show order of progression through the grid. The residual at (m, m) is computed using old guesses at the points indicated with $\times$ and new guesses at the circled points.

(Da "J. Holton, An introduction to Dynamic Meteorology" pag 146)

AVVEZIONE DI TEMPERATURA

Si suppone che la temperatura misurata da un pallone che si muove con il vento sia T_0 al punto x_0, y_0, z_0 , al tempo t_0 .

Se il pallone si muove al punto x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz dopo un tempo dt allora il cambiamento di temperatura registrato dT si esprime in serie di Taylor:

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z$$

Dividendo per δt e andando al limite $\delta t \rightarrow 0$ otteniamo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

(dove $\frac{dT}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta T}{\delta t}$). Si ha:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right) =$$

cioè
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T$$

Il termine $(-\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T)$ è l'avvezione di temperatura.

Quando il vento viene da una regione più fredda a una più calda il termine di avvezione è negativo (avvezione fredda) e contribuisce negativamente al cambiamento locale di temperatura.

Diamo un esempio per estendere il concetto di avvezione al campo barico:

La superficie di pressione decresce di $3 \text{ mb}/180 \text{ km}$ nella dire-

zione Est. Una barca che naviga verso Est a 10 Km/ora misura una caduta di pressione di 1 mb/3 ore. Qual'è il cambiamento della pressione sull'isola vicino cui il battello sta passando ?

Sia x orientato verso Est; allora

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt} - u \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1 \text{ mb}}{3 \text{ ore}} - \left(\frac{10 \text{ km}}{\text{ora}} \cdot \frac{-3 \text{ mb}}{180 \text{ km}} \right) = \frac{-1 \text{ mb}}{3 \text{ ore}} + \frac{3 \text{ mb}}{\text{ora} \cdot 18} = -\frac{1}{6} \frac{\text{mb}}{\text{ora}}$$

Se la derivata totale di una variabile è zero allora la variabile è conservativa seguendo il moto ed il cambiamento locale è interamente dovuto all'avvezione.

DIAGRAMMI TERMODINAMICI VERTICALI

Richiamiamo la definizione di diagramma termodinamico di Herlofson. In esso l'area è proporzionale al lavoro e alla energia. Nella figura 6 è rappresentato parte di questo diagramma: le linee orizzontali sono isobare, le isoterme sono linee trasversali, vi sono inoltre le adiabatich secche (lungo le quali è costante la temperatura potenziale e che rappresentano come varia la temperatura in funzione della pressione in un processo adiabatico dell'atmosfera) e le adiabatich saturate che rappresentano l'andamento della temperatura quando l'aria è satura.

Un primo esercizio svolto è quello di segnare i dati di un sondaggio di un pallone sonda, segnando in funzione della pressione, i valori della T e della temperatura di rugiada, ottenendo così le due spezzate come in figura 7.

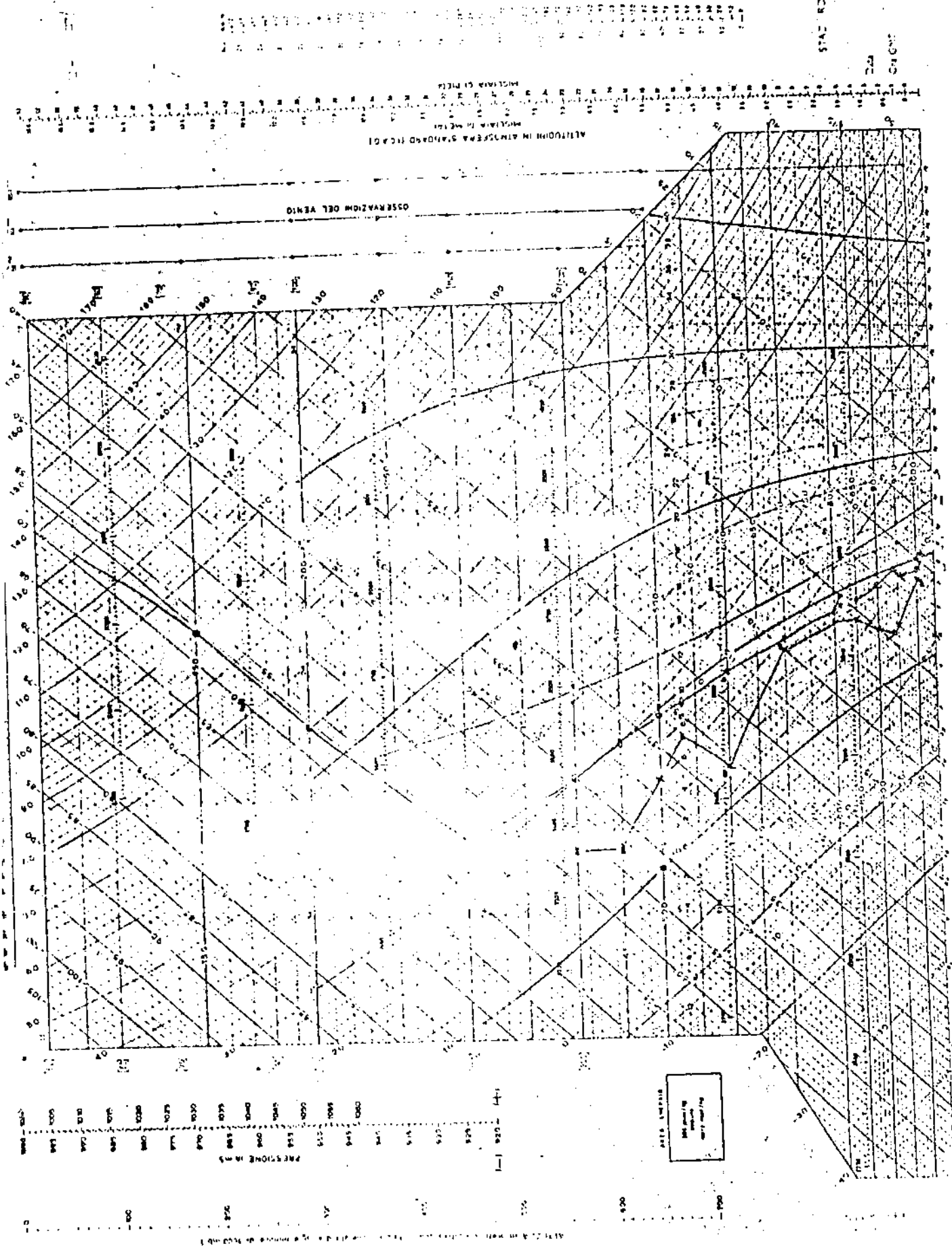
Stabilità dell'atmosfera

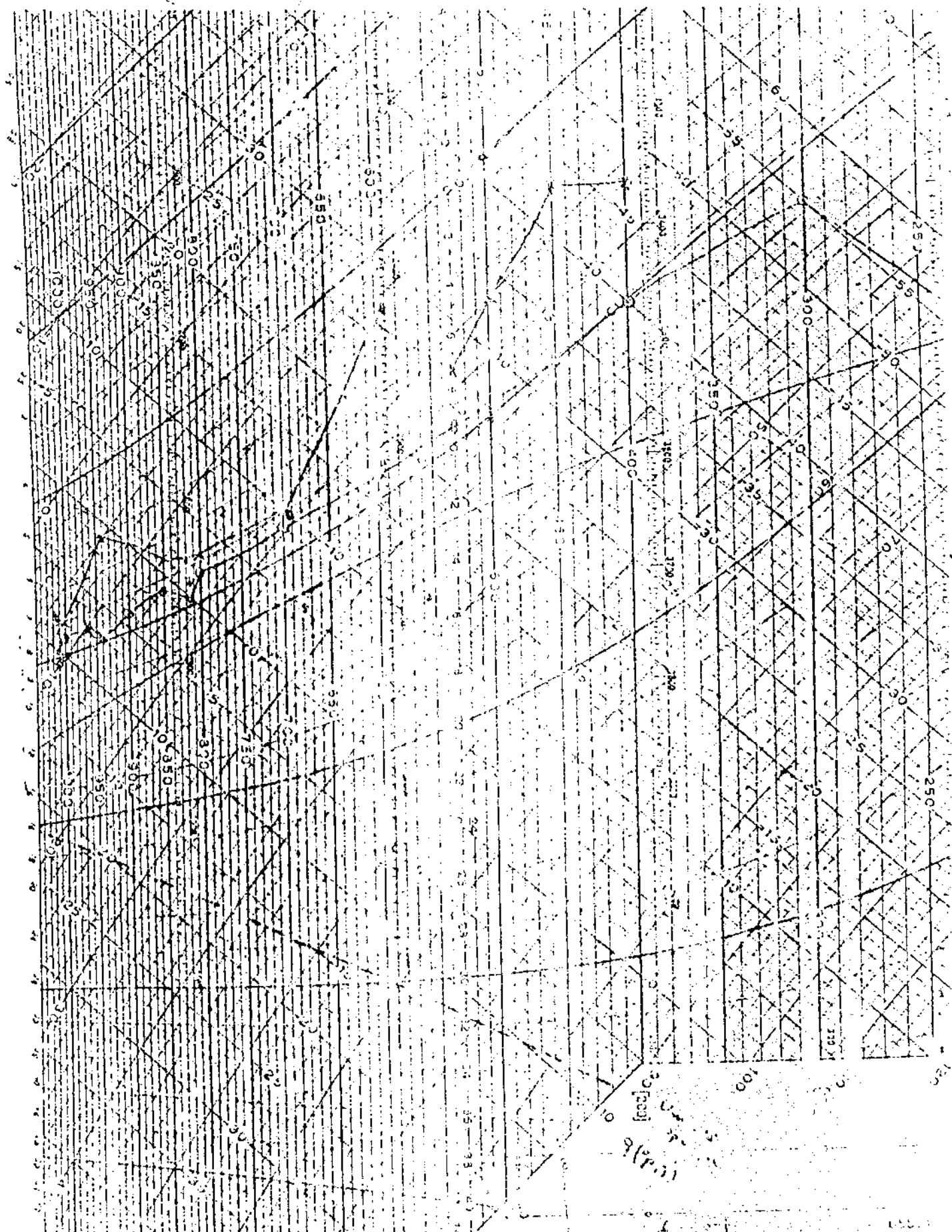
Vogliamo trovare un'equazione che permetta di prevedere il moto verticale di una massa d'aria secondo le sue caratteristiche di temperatura. Si immagini una particella d'aria con densità ρ' e pressione p' , immersa nell'aria ambiente di densità ρ e pressione p . Poiché l'ambiente è supposto in equilibrio idrostatico sarà:

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Fig. 6

101





La particella non in equilibrio idrostatico sarà soggetta ad accelerazioni e si avrà:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial z}$$

Poniamo $\rho' = \rho$. Eliminando il gradiente di pressione si ha:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g(\rho - \rho')}{\rho'}$$

Ricordando l'equazione di stato

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g(T' - T)}{T}$$

ma poiché $\rho = T \left(\frac{p}{1000} \right)^{R/p}$;

$$(8) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = g \frac{(\vartheta' - \vartheta_0)}{\vartheta_0}$$

ad un livello generico. Se la particella si trova inizialmente al livello $z=0$ spostandola adiabaticamente di δz , per lo ambiente la temperatura potenziale al livello superiore sarà:

$$\vartheta_{\delta z} \approx \vartheta_0 + \frac{d\vartheta_0}{dz} \delta z$$

mentre per la particella:

$$\vartheta'_{\delta z} = \vartheta_0'$$

Allora la (8) diventa:

$$(9) \quad \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = -N^2 \delta z$$

dove $N^2 = \frac{g}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dz}$.

L'equazione ha una soluzione generale del tipo $\delta z = A e^{i N t}$.

Quindi se $N > 0$ la particella oscilla intorno alla posizione d'equilibrio con periodo $\tau = 2\pi/N$. N è detta frequenza di Brunt-Vaisalla. Se $N=0$ la particella sarà in equilibrio indifferente; se $N < 0$ lo spostamento cresce esponen-

zialmente col tempo. Arriviamo dunque a definire il parametro di stabilità statica σ

$$\sigma = \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dz}$$

Il criterio di stabilità per aria secca sarà:

$$\sigma \begin{cases} > 0 & \text{stabile} \\ = 0 & \text{neutra} \\ < 0 & \text{instabile} \end{cases}$$

Troviamo un'altra forma per σ :

sapendo che

$$\theta = T \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} ; \quad \ln \theta = \ln T + \frac{R}{C_p} [\ln P_0 - \ln P]$$

derivando rispetto a z

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{R}{C_p} \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

introducendo l'equazione dell'idrostatica $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$ e l'equazione dei gas

$$(10) \quad \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{R}{C_p} \frac{\rho}{P} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\rho}{C_p T} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{T} \left(\frac{\rho}{C_p} + \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Poiché per una trasformazione adiabatica $0 = C_p dT - \alpha dp$,

$$0 = C_p dT + g dz \quad \text{sarà:} \quad \frac{\rho}{C_p} = - \frac{dT}{dz}$$

La (10) diventa:

$$(12) \quad \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{dT}{dz} + \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_d - \gamma$$

dove $\gamma_d = - \frac{dT}{dz}$, gradiente adiabatico secco e $\gamma = - \frac{\partial T}{\partial z}$, gradiente dell'aria. La (12) sarà:

$$T \sigma \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \gamma_d - \gamma$$

sarà ancora:

$$\gamma_d > \gamma$$

stabile

$$\gamma_d = \gamma$$

neutra

$$\gamma_d < \gamma$$

instabile

Notiamo anche che se si ha:

$$\gamma_{d_{\text{sat}}} < \gamma < \gamma_{d_{\text{vac}}}$$

allora si dice che l'aria è condizionatamente stabile.

Esercizio:

Posso definire:

$$\sigma' = - \rho \frac{g}{\sigma} \frac{d\sigma}{dp}$$

Attraverso il calcolo effettuato sui valori del sondaggio, ricavando il gradiente $\frac{d\sigma}{dp}$ con i valori di σ ottenuti attraverso le adiabatichette secche, assumendo come valore di σ il valore di un $\bar{\sigma}$ medio per lo strato considerato, il calcolo di σ' diventa banale.

Altezza di mescolamento.

Sia dato un sondaggio verticale; sia T_0 la temperatura della massa d'aria. Finè a che altezza essa si alzerà? Tracciando l'adiabatica corrispondente alla temperatura T_0 , il punto in cui il sondaggio incontra la linea adiabatica, rappresenta l'altezza di mescolamento.

Acqua precipitabile

È una grandezza meteorologica facilmente ricavabile dai dati del sondaggio. Diamo la definizione.

Si consideri una colonna d'aria di sezione S e di altezza Δz tra le pressioni p e p_0 . La massa d'aria ivi contenuta sarà: $\rho_a S \Delta z$ dove ρ_a è la densità media dell'aria. La massa d'acqua presente nella colonna sarà:

$$\rho_w S \Delta z = \frac{1}{\Delta p} \int_p^{p_0} q dp$$

dove q è l'umidità specifica definita come: $\frac{M_v}{M_d + M_v}$.
Il volume occupato da questa massa sarà dato da:

$$\frac{\rho_a}{\rho_w} S \Delta z = \frac{1}{\rho_w g \Delta z} \int_p^{p_0} q dp$$

Ricordando l'equazione dell'idrostatica e che ρ_w è la densità dell'acqua. Il volume d'acqua per sezione unitaria sarà

$$\frac{1}{g \rho_w} \int_p^{p_0} q dp$$

Dimensionalmente:

$$[\sigma] = \frac{[sg]}{[pg]} \frac{[q]}{10^3 [r]} 10^3 [cm] = cm$$

dove bisogna tenere conto che q è espressa in gr/Kg e p in mb. Definiamo acqua precipitabile, P. W., il volume d'acqua di una colonna d'aria espressa in cm.

Calcolo

Dopo aver riportato i dati di un sondaggio su di un diagramma di Herloffson si deve calcolare l'integrale dell'umidità specifica sull'intervallo di pressione considerato. Applicando la definizione di integrale nell'intervallo tra 1000 e 500 mb, si potrà avere:

$$\int_{1000}^{500} q dp \approx \frac{q_{1000} + q_{900}}{2} * 100 + \frac{q_{900} + q_{850}}{2} * 50 + \frac{q_{850} + q_{800}}{2} * 50 +$$

Le $q(p,T)$ sono facilmente ricavabili dal diagramma trovando la linea tratteggiata viola che passa per il punto di coordinate (p, T_d) assegnato, in corrispondenza della quale si legge il valore dell'umidità specifica.

BIBLIOGRAFIA

Per approfondire la conoscenza della problematica della meteorologia si consiglia di fare riferimento ai seguenti testi:

- 1) Haltiner & Martin : "Dynamic and Physical Meteorology"
- 2) J. Holton: "An introduction to Dynamic Meteorology"
- 3) Haltiner: "Numerical Weather Prediction"
- 4) Sverre Pettersen: "Weather Analysis and Forecasting"
- 5) (più divulgativo) Sutton : "La Nuova Meteorologia" E.S.T. Mondadori .

P A R T E I I

Elementi di micrometeorologia

Estratto dalle lezioni del Prof. E. Rosini

Cenni sul bilancio termoradiativo dell'atmosfera

1) - La radiazione è il più importante fattore meteorologico, in quanto fornisce l'energia per i moti atmosferici ed è praticamente l'unico mezzo di scambio energetico fra la terra ed il resto dell'universo. Ne riassumiamo le principali leggi che ci interessano.

Il trasferimento di calore nell'atmosfera può avvenire in 4 modi: a) la conduzione termica ben nota, come nei metalli; b) la convezione, per trasporto materiale, come nei fluidi riscaldati dal basso, in aggiunta alla tenuissima propagazione per conduzione molecolare; c) il trasporto sotto forma di calore latente di evaporazione (circa 580 calorie sottratte alla superficie terrestre per ogni gr di acqua evaporata) che si rende disponibile per l'aria quando il vapore condensa e forma le nubi; d) la radiazione termica, che non richiede supporti materiali, data in pratica dalla radiazione elettromagnetica nell'intervallo di lunghezza d'onda da $0,2$ a 100μ (l'intervallo $0,36$ a $0,76 \mu$ è luminoso e lo teniamo generalmente distinto).

La prima radiazione da considerare è quella in arrivo dal sole (unica sorgente primaria di energia), che è l'atmosfera terrestre riflette, diffonde, assorbe e trasmette alla superficie della terra; essa ha intensità pari a $K = 2.00$ cal/cm² perpendicolare e per minuto in corrispondenza alla distanza media del sole che è $D = 150 \cdot 10^6$ Km; l'intensità varia di $\pm 3,5\%$ al passare dall'afelio al perielio.

Il valore di K , "detta costante solare", può attualmente essere misurato mediante i satelliti artificiali; precedentemente era stato determinato con metodo indiretto basato sul seguente principio. Come sarà più avanti precisato, l'atmosfera nelle giornate limpide e serene, in assenza di perturbazioni e moti d'insieme delle masse d'aria, può essere considerata stratificata, cioè omogenea in senso orizzontale; in tali condi-

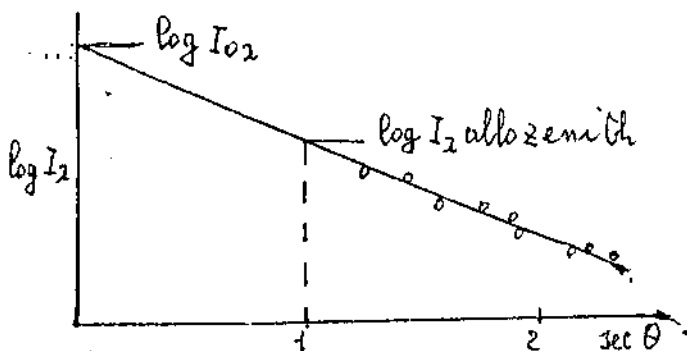
zioni consideriamo uno straterello di altezza dz ; una radiazione di lunghezza d'onda λ e di intensità I_λ che lo attraversi verticalmente subisce, per effetto della diffusione e dell'assorbimento, una variazione di intensità pari a $dI_\lambda = -\sigma_\lambda \rho I_\lambda dz$, dove ρ è la densità e σ_λ il "coefficiente di estinzioni" (legge di Beer). Se $I_{0\lambda}$ è l'intensità al limite superiore dell'atmosfera che indichiamo con z_∞ l'intensità residua al livello 0 sarà

$$I_{1\lambda} = I_{0\lambda} e^{-\int_0^{z_\infty} \sigma_\lambda \rho dz} = I_{0\lambda} e^{-H} \quad \text{con } H = \int_0^{z_\infty} \sigma_\lambda \rho dz$$

Se conoscessimo l'andamento di σ_λ e ρ con l'altezza potremmo determinare H e quindi dalla misura $I_{1\lambda}$ risalire alla $I_{0\lambda}$ e così, ripetendo la misura per un numero sufficiente di lunghezze d'onda, al valore integrale K dell'energia in arrivo.

Si preferisce evitare di fare ipotesi su σ_λ e ρ e sfruttare il cammino del sole nel cielo durante la giornata, supponendo nulla la curvatura terrestre e rettilinei i raggi solari. In tal modo se lo straterello dz è attraversato con angolo θ dalla verticale, il precedente ragionamento porta a: $I_{1\lambda} = I_{0\lambda} e^{-H \sec \theta}$ che può scriversi

$\log I_{1\lambda} = \log I_{0\lambda} - H \sec \theta$, la quale nel piano ($H \sec \theta$, $\log I$) è una retta che taglia l'ordinata appunto nel valore $\log I_{0\lambda}$. In ascisse si può anzi riportare direttamente $\sec \theta$.



Se si conosce l'andamento di ρ con l'altezza e si può supporre costante il coefficiente di estinzione (supposizione assai precaria), si può adoperare lo stesso metodo facendo misure contemporanee da altezze diverse, riportando in ascisse anzichè $\sec \theta$ (che ora è costante), valori proporzionali ad $\frac{H}{\sigma_\lambda} = \int_{z_1}^{z_\infty} \rho dz$

metodo facendo misure contemporanee da altezze diverse, riportando in ascisse anzichè $\sec \theta$ (che ora è costante), valori proporzionali ad $\frac{H}{\sigma_\lambda} = \int_{z_1}^{z_\infty} \rho dz$

dove z sono le altitudini delle stazioni di misura.

L'insolazione che cade complessivamente sulla terra interessa una sezione di area πR^2 con $R = 6.370$ Km raggio medio della terra.

Per la legge di Stefan-Boltzmann, (ricavata dalla legge di Planck $I_{\lambda,T} = C_1 \left[\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1) \right]^{-1}$ per integrazione) detta T_s la temperatura del sole e $R_s = 695.560$ Km il suo raggio, l'uguaglianza fra la totale energia emessa al min: $4 \pi R_s^2 \sigma T_s^4$ e quella ricevuta sulla sfera a distanza della terra D , cioè $4 \pi D^2 K$ porta al valore $T_s = (K D^2 / \sigma R_s^2)^{1/4} = 5790$ °K. La stessa legge per la terra supposta irradiante e ricevente anche un corpo nero, per mettedi ricavarne la temperatura (fittizia) media T_E dall'uguaglianza fra energia ricevuta $\pi R^2 K$ ed emessa $4 \pi R^2 \sigma T_E^4$; ne risulterebbe $T_E = 278$ °R = + 5 °C. In realtà si hanno due fatti: la temperatura media della superficie terrestre è circa $T_E' = 15$ °C; l'insieme terra-atmosfera opera una riflessione dell'energia pari a circa il 35% (riferita a tutte le lunghezze d'onda, diversa dall'"albedo" astronomica del solo intervallo del visibile che è valutata del 40%). Quindi la temperatura T_E'' della terra come corpo irraggiante nel suo insieme deve essere tale che $4 \pi R^2 \sigma T_E''^4 = \pi R^2 \cdot 0,65 K$; risulta $T_E'' = 250$ K = -23° ~~centigrada~~

temperatura che si riscontra in media a 450 mb cioè a circa 6 Km di altezza. Da ciò si trae l'immagine di una atmosfera che si comporta come una macchina termica fra le temperature T_E' , T_E'' la quale produce lavoro secondo la legge di Carnott e ubbidisce al secondo principio della termodinamica. A titolo di curiosità, se la terra fosse senza atmosfera e quindi anche senza mari, ghiacciai e vegetazione, l'albedo sarebbe circa la stessa e quindi la temperatura media circa - 23 °C.

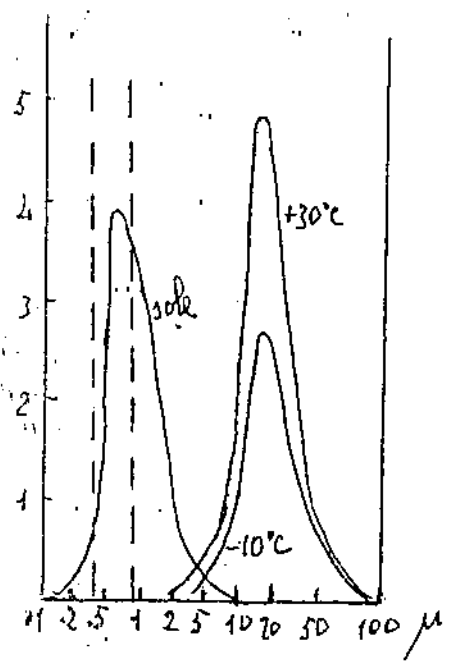
Come si è detto l'intensità di emissione è massima per una lunghezza d'onda λ_{max} data dalla legge dello spostamento di Wien:

$$T \cdot \lambda_{max} = \text{cost} = 2880 \quad (^\circ K, \mu)$$

113 (10)

Per l'emissione solare si ha sperimentalmente $\lambda_{max} = 0,47 \mu$ cui, corrisponderebbe una temperatura di circa 6.100 °K, un poco superiore a quella di 5.790 °K sopra detta. Per la terra, alla media della superficie $T_E = 288$ °K si ha $\lambda_{max} \approx 10,0 \mu$ nell'infrarosso. La legge di Planck è molto asimmetrica, per cui l'energia complessiva per $\lambda < \lambda_{max}$ è appena il 25% del totale; si considera perciò anche la λ_s mediana, per la quale vale la legge $T \cdot \lambda_s = \text{cost} \approx 4100$ (°K, μ) che per la superficie terrestre dà $\lambda_s = 14 \mu$.

In pratica la radiazione emessa dall'insieme terra-atmosfera si trova fra 6,8 e circa 100 μ , mentre quella solare ha $\lambda_s = 0,7$ e si estende fra 0,3 e 2,2 μ ; perciò nell'intervallo fra le due radiazioni, cioè fra 2,2 e 6,8 μ , si trova appena il 5% del loro insieme, tale intervallo perciò divide effettivamente lo spettro che interessa l'atmosfera in due parti: quella delle onde corte, di tipo solare e quella delle onde lunghe di tipo terrestre. La figura accanto chiarisce bene questi fatti; le λ sono in scala logaritmica, le intensità in ordinata in unità convenzionali in scala lineare. L'area delle tre curve è proporzionale rispettivamente alla costante solare K di-



divisa per 4 (cioè l'energia che riceverebbe in media 1 cm² di superficie terrestre al minuto in assenza di atmosfera, data da $K \pi R^2 / 4 \pi R^2$).

all'emissione di 1 cm^2 di coppo nero a $+ 30^\circ \text{C}$ e a $- 10^\circ \text{C}$, al minuto; la prima curva è sperimentale, o meglio misurata al suolo e poi variata proporzionalmente per ottenere $K/4$; le altre assgono la legge di Planck.

2) - Equilibrio del suolo . Consideriamo il caso ideale di una superficie terrestre orizzontale indefinita, cosicchè il confine fra terra e atmosfera sia un piano senza spessore e senza massa, cioè capace solo di essere attraversato senza trattenere calore; chiamiamo positive le quantità che portano calore al primo strato sottilissimo sotto tale confine.

Il fattore principale dello scambio termico è la radiazione S , somma algebrica della radiazione incidente del sole e dell'atmosfera (positiva) e della radiazione di temperatura uscente (negativa), misurata in $\text{cal. cm}^{-2} \text{ min}^{-1} = \text{langley. min}^{-1} = \text{ly. min}^{-1}$.

Il secondo fattore è il flusso di calore B all'interno della terra, positivo quando sale verso la superficie come nelle notti fredde.

Il terzo fattore è lo scambio di calore con l'aria soprastante L , positivo quando l'aria cede calore al suolo; tale scambio più che per conduzione molecolare (quasi sempre trascurabile) avviene per il trasporto materiale (diffusione turbolenta, convezione);

Infine ci è l'effetto dell'evaporazione V , anch'esso in $\text{cal cm}^{-2} \text{ min}^{-1}$, legato al fatto che 1 g di acqua evaporata trasporta con sé come calore latente, circa 600 cal, cui si aggiungono 80 cal/g (di liquefazione, a 0°C) se si tratta di sublimazione diretta dal ghiaccio; normalmente V è negativo, salvo i casi di brina o rugiada.

Alla superficie confine aria-suolo si ha dunque l'equazione fondamentale $S+B+L+V=0$; possiamo aggiungere al 1° membro: un termine Q dovuto all'eventuale advezione di aria più calda o più fredda, più umida o

più secca, dalle regioni circostanti; un termine N anch(esse eventuale nel caso di precipitazioni liquide o solide a temperatura diversa dal suolo (a parte le modificazioni da esse indotte nello stato del suolo); nuovi fattori dovuti alla eventuale presenza di vegetazione; infine se siamo su una distesa liquida, il fattore B del suolo solido è sostituito da altro W .

In un bilancio complessivo annuo il termine L tende a zero, poichè il flusso di calore dal centro della terra è del tutto trascurabile (dall'ordine delle 50 cal.cm^{-2} all'anno rispetto alle 260.000 inviate in media dal sole), perciò tutta l'energia netta S ricevuta dal suolo viene spesa, entrò un ciclo climatico, per evaporazione V e in parte minore per immissione nell'atmosfera di calore sensibile L ; ciò mostra la stretta relazione fra bilancio termico e bilancio idrico. Occorre inoltre tener presente la diversità fra equilibrio del bilancio radiativo della terra come pianeta e bilanci locali o di settore o di stazione, come anche la non forte prevalenza dell'effetto di immagazzinamento di energia durante il giorno a favore della notte e durante la estate a favore dell'inverno.

3) - Analisi del termine S . Per chiarezza, chiamiamo "radiazione uscente effettiva" la perdita di energia dovuta alla legge di Stefan-Boltzmann e "radiazione uscente netta" un bilancio radiativo negativo, cioè un valore negativo di S . Abbiamo visto che la S interessa due regioni dello spettro ben individuabili; la parte delle onde corte è presente solo durante il giorno ed è costituita dalla parte I della radiazione solare diretta ("insolazione") che non è diffusa per dispersione o assorbita dall'atmosfera o riflessa dalle nubi, e dalla parte non diretta H che arriva dal cielo, dovuta alla diffusione dell'atmosfera nel suo insieme e costituente la "Luce del giorno". L'insieme delle onde corte $I + H$ è chiamata "radiazione globale"; di esso una parte R è riflessa dalla superficie terrestre e la sua

$$R/(1+H)$$

entità dipende dalla natura del suolo. Il rapporto $R/(1+H)$ è definito "albedo" (per chiarezza; mentre la vecchia albedo astronomica si riferiva alla sola parte visibile, l'albedo riguarda l'intervallo dell'energia solare, cioè da circa 0,3 a circa 3μ , diversa dalla riflessione integrale su tutto lo spettro fino a 100μ la quale come valore medio su tutta la terra vale come si è visto il 35%).

Fissiamo l'attenzione sull'albedo, importante non tanto nei bilanci medi ai quali sono interessate tutte le lunghezze d'onda, quanto nei comportamenti locali della superficie terrestre. A parte la distinzione fra riflessione regolare su superfici speculari e diffusione in tutte le direzioni da parte delle superfici rugose naturali, è utile tener presenti, come indicativi degli ordini di grandezza, alcune albedo in %:

neve fresca 75-95, vecchia 40-70; ghiacciai tersi 30-46, sporco 20-30; frangenti e sabbia bianca 30-60; suolo sabbioso 15-40, suolo coltivato 7-10; prati e campi 12-30, boschi 5-20; area intensamente fabbricata 15-25; mare 3-10; distesa di nubi dense 60-90.

L'albedo del suolo dipende oltre che dalla sua natura, dal suo grado di umidità (diminuisce al crescere dell'umidità fino a dimezzarsi) e della lunghezza d'onda nelle analisi a zone di spettro (in genere ha un massimo nel rosso e diminuisce sia nell'infrarosso che verso l'ultravioletto, salvo la neve che mantiene una riflessione elevatissima per i raggi ultravioletti mentre diviene perfettamente "nera" inoltrandosi nell'infrarosso oltre i 3μ).

La parte non riflessa $1+H+R$ della radiazione globale è assorbita dalla superficie terrestre, con modalità e fino ad una profondità che dipendono dalla natura e dalla struttura del suolo: su polvere finissima la luce si dimezza nei primi 15μ , nella sabbia fine si riduce ad un millesimo nello spessore di 1 mm, in terreni costituiti da grani di 4-6 mm si riduce

117
12

al 10% dopo circa 8 mm in media. Ciò non interessa il bilancio termico ma ha importanza per la biologia del suolo, poichè la vita dei batteri e delle alghe e la germinazione dei semi possono richiedere la etimolazione della luce. Inoltre nei terreni granulosi, al crescere della distanza e la superficie cresce la percentuale delle maggiori lunghezze d'onda: la luce rossa predomina entro la terra perchè è riflessea più fortemente della azzurra nelle molte occasioni in cui vi è riflessione sulle particelle di suolo (abbiamo detto che l'albedo cresce dal violetto al rosso). Per completare il ragionamento notiamo che questo comportamento della luce entro il suolo non ha alcuna relazione con quello in seno all'atmosfera, dove si hanno i due effetti fra loro coerenti dell'azzurro del cielo e del viraggio verso il rosso della luce di una sorgente guardata attraverso un grosso strato (ad esempio il sole, specie all'orizzonte, e gli oggetti oltre un lungo tunnel con traffico): le molecole e le particelle in sospensione che abbiano dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda (più esattamente che siano presenti in buon numero in volumi dell'ordine di λ^3) diffondono la luce incidente secondo la legge di Lord Rayleigh, cioè con intensità inversamente proporzionata alla quarta potenza di λ , quindi più il violetto che il rosso con una combinazione che per la luce solare è vista come azzurro; conseguentemente, poichè l'assorbimento è piccolo e più uniforme trasmettono per trasparenza nella direzione di incidenza ^{il colore} con intensità ^{maggiore} complementare cioè arancione-rosso.

Complementi sull'energia raggiante dell'atmosfera - fino a $0,29 \mu$
la radiazione è assorbita dall' O_2 nella stratosfera che ei converte in piccola parte in O_3 ;
da $0,3$ a $0,4$ (circa) radiazione ultravioletta che giunge (in parte in relazione all'atmosfera attraversata) al suolo ed è responsabile di molti ed importanti effetti biologici: disattivazione dei virus, formazione di vitamina D, scottature e abbronzature da esposizione al sole, stimolazione

dei cancri della pelle. Tutte le $\lambda < 0,4$ rappresentano il 7% della radiazione solare ai limiti dell'atmosfera, che si riduce mediamente al 3% al livello del mare;

da 0,4 a 0,7 circa energia chiamata luce, che giuoca un ruolo fondamentale nei processi biologici: fotosintesi e fotomorfogenesi nelle piante, visione negli animali e nell'uomo, effetti di fotoperiodismo sia nelle piante che nella vita animale. In questa regione dello spettro il principale effetto dell'atmosfera è la dispersione causata dalle molecole gassose dell'aria, secondo la legge di Rayleigh, per cui la luce blu di 0,4 μ

è dispersa 9 volte più della rossa di 0,7. Con cielo sereno la luce blu contenuta nella radiazione che arriva al suolo ^{racconta} dal 75 all'85% di quella contenuta ai limiti dell'atmosfera; in questa regione dello spettro la dispersione operata dall'atmosfera è molto più importante dell'assorbimento dovuto alla stessa; nella regione dell'infrarosso l'assorbimento diviene molto più importante della dispersione e molti costituenti atmosferici assorbono fortemente, specie il vapor acqueo; può notarsi che di conseguenza la presenza del vapor acqueo incrementa il rapporto tra radiazione visibile e radiazione infrarossa.

Poichè l'energia della radiazione solare diretta va spesso misurata con strumenti sensibili all'intera regione fra 0,4 e 3 μ (pneumatometri), ai biologi necessita conoscere quale frazione di tale energia è ricevuta nello spettro visibile: tale frazione è spesso valutata nel 45% che sale al 50% se si considera la radiazione globale (diretta più diffusa). Questi rapporti non dipendono sensibilmente dall'elevazione del sole sull'orizzonte, perchè la frazione visibile, approssimandosi all'orizzonte cresce nella componente dovuta alla radiazione diretta (il rapporto fra le due ha un minimo per elevaz. solare di 40; pari al 10% per cielo limpido e 25% torbido).

Nella pratica il contenuto di energia fotosinteticamente utile è preso come metà dell'energia misurata dagli strumenti convenzionali; esso è indicato con la sigla PAR o PHAR.

Consideriamo ora la parte delle grandi lunghezze d'onda della figura di pag. 10 presenti nel termine S. Tale parte ha due componenti di segno opposto, di cui la prima è l'irraggiamento della superficie terrestre.

Se il suolo si comportasse esattamente come un corpo nero tale irraggiamento sarebbe $\sim T^4$; per un corpo non nero l'emissione per una data lunghezza d'onda è minore, data da $\epsilon_\lambda \cdot C_\lambda$ dove ϵ_λ indica l'emissione del corpo nero per quella λ ; la ϵ_λ è il coefficiente di emissività monocromatica, che per la legge di Kirchhoff è uguale a K_λ = coefficiente di assorbimento monocromatico. Si è trovato sperimentalmente che per le grandi lunghezze d'onda di cui qui ci interessiamo, cioè dai 3 ai 100 μ , la terra è praticamente un corpo nero con diffusività $1 - K_\lambda$ minore del 5% in tutta la gamma, comprese le piante e gli alberi nell'intervallo da 3 a 25 μ (salvo rare eccezioni quali le foglie del limone, ad esempio, che mostrano una punta isolata del 17% a 10 μ) e, come si è detto sopra, compresa la neve che è un perfetto corpo nero con riflessione non superiore allo 0,5%. In pratica dunque l'irraggiamento terrestre è dato da $\sim T_B^4$ dove T_B è la temperatura di irraggiamento del suolo (che può aver bisogno di una più esatta definizione nei casi complessi); si noti che nella stessa misura in cui l'irraggiamento è minore di quello del corpo nero, vi è la riflessione della radiazione proveniente dall'atmosfera che gli è simile in quantità e grosso modo in costituzione cromatica, quindi non distinguibile con uno strumento di misura globale, e perciò l'energia proveniente dal suolo, ad esempio, misurata da un aereo, risulta con molta esattezza pari a $\sim T_B^4$, permettendo una esatta misura della temperatura.

ra di irraggiamento σT_B .

Il secondo termine della radiazione lunga è dato dall'irraggiamento atmosferico verso il basso detto "controradiazione" G , dovuto principalmente al vapor acqueo e all'anidride carbonica, di cui si tratterà qui sotto. Riassumendo, il bilancio radiativo del suolo è dato dall'equazione

$$S = I + H + G - \sigma T_B^4 - R$$

(cal. $\text{cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$);

la quantità $-S$, in un dato istante o come media di un intervallo di tempo, è detta "radiazione netta del suolo".

4 - La radiazione notturna. Una considerazione particolare merita il bilancio radiativo durante la notte, quando i termini relativi alle onde corte I , H , R sono nulli ed il bilancio termico del suolo, salvo casi eccezionali, è negativo; la quantità $-S = \sigma T_B^4 - G$ è detta "radiazione notturna"; tale radiazione è legata, in quantità e composizione spettrale, alla temperatura del suolo T_B in forma semplice secondo le leggi dell'emissione del corpo nero, ed alla controradiazione dell'atmosfera G che è più complessa e che qui consideriamo con qualche dettaglio.

La G viene in massima parte dal vapor acqueo, dall'anidride carbonica e in piccola misura dall'ozono, con i relativi spettri di emissione (uguali ai rispettivi spettri di assorbimento). Lo spettro di assorbimento del vapor d'acqua mostra un primo massimo intorno $2,7 \mu$, un secondo massimo largo ed intenso intorno $6,3 \mu$ ed un assorbimento crescente da 12μ in poi fino ad una grande opacità raggiunta già sui 50μ ; vi sono pertanto due "finestre", la prima stretta ma con trasparenza totale intorno ai 4μ , la seconda larga da 8 a 12μ con assorbimento piccolo ma non nullo (uno spessore di aria umida contenente vapore corrispondente a $0,1$ mm di acqua liquida, detta "acqua precipitabile"

assorbe il 10% dell'energia in tale banda) e riveste la maggiore importanza perchè nella zona di massima emissione dei corpi neri alle temperature terrestri.

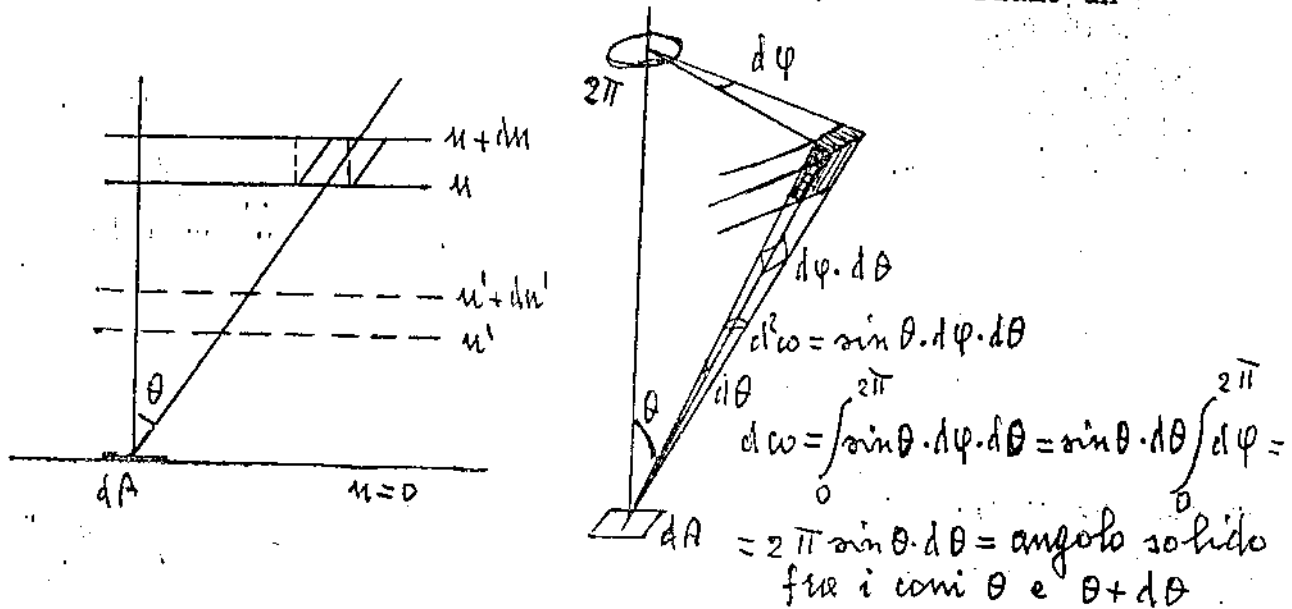
Lo spettro del CO_2 mostra poche bande, ma ben definite, intorno 2,8, 4,3, 14,9 μ ; data la proporzione assai stabile del CO_2 nell'aria (fra 30 e 40 parti per milione in volume), il suo contributo alla controradiazione è quasi costante ma rappresenta non più di 1/6 del totale.

Ogni strato atmosferico è coinvolto nella controradiazione, in relazione soprattutto al contenuto di vapor acqueo ed alla temperatura; tuttavia in genere il contributo dei primi strati è fortemente predominante. Secondo un computo, in un'atmosfera normale con 14 mm di acqua precipitabile, il primo strato di 100 contribuisce per il 73% alla controradiazione che raggiunge il suolo, ed il 90% del contributo viene dai primi 600 m di atmosfera. Ciò suggerisce di calcolare la G mediante i dati delle stazioni meteorologiche al suolo (in capannina) quando non sono noti i dati in aria libera.

Data la sua importanza, rendiamoci conto di come possa fare il computo del contributo degli strati atmosferici supponendo una stratificazione orizzontale e considerando una sola sostanza emittente - assorbente, il vapor d'acqua (quindi tutti gli altri costituenti l'atmosfera siano otticamente inesistenti). Ricordiamo che lo spessore ottico di uno strato dz con densità ρ della sostanza otticamente attiva è dato da $du = \rho dz$. Lo spessore ottico in un'atmosfera in cui emette-assorbe, solo il vapor acqueo, detta $q = \rho_v / \rho_a$ l'umidità specifica, essendo ρ_v la densità del vapore e ρ_a quella dell'aria umida, e ricordando che la variazione di pressione è $dp = -g \rho_a dz$ può dunque essere espresso da: $du = \frac{1}{g} q \cdot dp$, e integrando dalla pressione al suolo ai limiti dell'atmosfera si ha lo spessore totale

$$u_{\infty} = \frac{1}{g} \int_0^{p_0} q \cdot dp$$

Ciò premesso, aiutandoci con le figure, consideriamo un



cilindretto elementare retto compreso fra i piani orizzontali di altezza ottica u e $u+du$; esso emette alla lunghezza d'onda λ , verticalmente verso il basso, con intensità $dI_2 = K_2 I_2^* du$ essendo I_2^* l'intensità di emissione monocromatica di un'uguale superficie orizzontale di corpo nero alla stessa temperatura e K_2 il coefficiente di emissione (quindi anche di assorbimento) monocromatico di uno spessore ottico unitario. L'intensità di emissione di un cilindretto inclinato dell'angolo θ sarà allora $dI_{2,\theta} = K_2 I_2^* du \cdot \sec \theta$. Tale radiazione attraversando un du' con inclinazione θ è assorbita secondo la legge (di Beer): $d(dI_{2,\theta}) = -K_2 (dI_{2,\theta,u'}) du' \sec \theta$; integrando rispetto ad u' da $u'=u$ ad $u'=0$ si ha l'intensità con cui la radiazione del cilindretto arriva al suolo:

$$dI_{2,\theta,0} = dI_{2,\theta} e^{-K_2 u \sec \theta} = K_2 I_2^* e^{-K_2 u \sec \theta} du \sec \theta.$$

Tutti i cilindretti obliqui visti dall'elemento dA di suolo sotto l'angolo θ , appartenenti ad un anello circolare fra u ed $u+du$

come mostrato nella figura di destra, contribuiscono ugualmente al flusso in arrivo su dA , e l'angolo solido sotto cui tutto l'anello è visto risulta $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Ricordando che il flusso F (densità di flusso) è legato all'intensità della relazione $dF = I \cdot d\omega$ e che anche l'elemento dA è inclinato dell'angolo θ rispetto alla direzione di propagazione, per cui $dF = I \cdot d\omega \cdot \cos \theta$ (ed essendo $\sec \theta = \cos \theta = 1$), si ha il flusso monocromatico complessivo dovuto all'anello $d\theta$ compreso fra u ed $u+du$:

$$dF_{\lambda, u, 0} = 2\pi K_{\lambda} I_{\lambda}^* e^{-K_{\lambda} u \sec \theta} \sin \theta d\theta du$$

Integrando prima rispetto a θ , cioè su tutto lo strato du , e poi rispetto a λ si ha $dF_u = 2 \left[\int_0^{\infty} K_{\lambda} F_{\lambda}^* H_2(K_{\lambda} u) d\lambda \right] du$, dove $F_{\lambda}^* = \pi I_{\lambda}^*$ è la densità di flusso monocromatico del corpo nero e $H_2(K_{\lambda} u)$ è una funzione integrale (funzione di Gold del 2° ordine).

Il flusso totale sull'elemento dA si ottiene infine integrando il contributo dF_u dello strato du da $u=0$ ad $u=u_{\infty}$; in pratica all'integrale si sostituisce la sommatoria dei contributi calcolati in termini finiti, suddividendo l'atmosfera in un certo numero di strati. I risultati del calcolo sono stati sopra sintetizzati.

Come si è detto, essi suggeriscono di valutare la G_{ms} mediante i dati al suolo. Una formula che risale ad Ångström è la seguente:

$$G = a T_L^4 (a - b \cdot 10^{c \cdot e}) \quad \text{dove } T_L \text{ è}$$

la temperatura dell'aria (in capannina) ed e la pressione di vapor acqueo; vi sono anche altre formule e grafici d'uso pratico, dato che la misura diretta di G_r non è ancora abituale.

Introducendo il valore (ricavato o misurato) di G_r e mante-

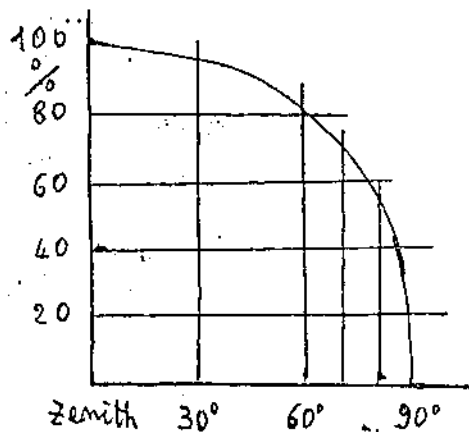
nendo la temperatura T_L si ha la "radiazione uscente effettiva" di un corpo nero alla stessa temperatura dell'aria $-S_L = \sigma T_L^4 - G$, diversa dalla "radiazione terrestre effettiva", cioè del suolo $-S_B$, che di notte di solito è più freddo. In pratica si hanno dei grafici che permettono di computare direttamente $-S_L$ misurando T_L ed e , e poi di passare a $-S_B$ con una correzione lineare del tipo:

$-S_B = -S_L - \alpha \delta$, dove $\delta = T_L - T_B$ è la differenza di temperatura fra aria e suolo. Per computare il coefficiente α si nota che $T_B^4 = (T_L - \delta)^4 = T_L^4 - 4 T_L^3 \delta$

e che $-S_B = \sigma T_B^4 - G = -S_L - 4 \sigma T_L^3 \delta$.

Ad esempio per $T_L = 8^\circ\text{C}$ (valido per l'intervallo da 0°C a 16°C) si ha $\alpha = 4 \sigma 281^3 = 0,007$ in cal $\cdot \text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-1}$.

E' interessante soprattutto per gli studi di microclimatologia, la considerazione della distribuzione angolare della radiazione uscente effettiva, dallo zenith all'orizzonte. Essa dipende soprattutto dal vapor



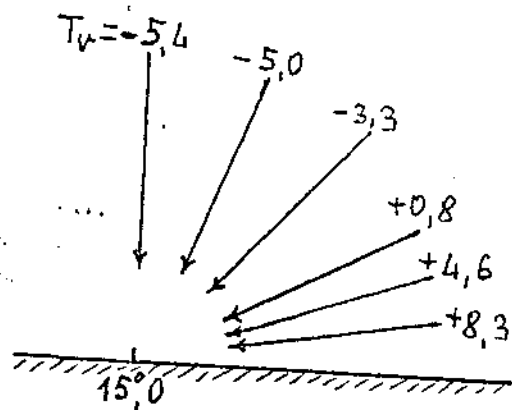
acqueo, in relazione al contributo alla G dei vari strati di aria, ma mostra un andamento come in figura: cioè la radiazione uscente effettiva è già forte a pochi gradi dall'orizzonte. Per tale causa il grafico permette di controllare, ad esempio, come si modifica il bilancio radiativo quando il suolo intorno al punto

di osservazione anziché orizzontale è una conca, o un pendio di varia inclinazione, o una strada tra fabbricati alti.

Le considerazioni che precedono si adattano anche al caso di cielo parzialmente o totalmente coperto da nubi, ma l'entità della controradiazione globale G si modifica sensibilmente in dipendenza del grado di copertura e dell'altezza delle nubi; la relazione fra la controradiazione con cielo nuvoloso G_n e quella con cielo sereno G è del tipo $G_n = G (1 + h n^2)$ dove n è la nuvolosità (frazione di cielo coperto) ed h è un coefficiente dipendente dall'altezza dello strato nuvoloso (piccolo per i cirri, dell'ordine di 0,25 per le nubi basse).

Tutto ciò permette di rendersi conto delle variazioni di temperatura durante la notte a seconda della ubicazione e dello stato del cielo, e di pervenire a regole per la previsione degli abbassamenti sotto lo 0°C (gelate).

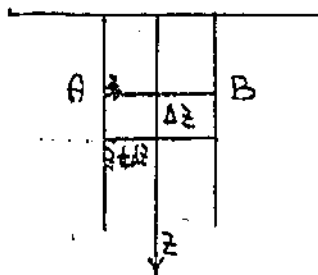
Un modo espressivo, storicamente introdotto da studiosi italia-



ni, per mettere in evidenza la radiazione effettiva uscente e la sua variazione con l'altezza sull'orizzonte si ha definendo la "temperatura virtuale del cielo" T_v , la temperatura cioè che dovrebbe assumere un corpo nero ricoprente tutto il cielo (op-

pure la corona sferica all'altezza angolare considerata) affinché la radiazione uscente effettiva rimanga la stessa. Nel caso globale di tutto il cielo dovrà essere $\sigma T_v^4 = G$. La figura riporta un esempio di distribuzione angolare della temperatura virtuale del cielo.

5 - Analisi del termine B - Il meccanismo principale della propagazione del calore nel suolo è la conduzione molecolare. Per fissare le caratteristiche principali supponiamo che lo strato di suolo interessato sia omogeneo, isotropo e con temperatura variabile solo con la profondità e consideriamone un cilindro verticale di sezione unitaria avente per limite superiore la superficie terrestre. Attraverso la se-



zione AB alla profondità Z si ha un flusso di calore B (nell'unità di tempo) proporzionale al gradiente verticale di temperatura $\partial \vartheta / \partial z$ dove la temperatura ϑ è funzione di Z e del tempo t (ricordiamo che abbiamo definito positivo il flusso B quando sale verso la su-

perficie, cioè quando ϑ cresce con la profondità, cioè con Z); pertanto $B = -\lambda \partial \vartheta / \partial z$. Il coefficiente λ è detto coefficiente di conduttività "calorimetrica" del suolo, uguale al calore $B(Z)$ che passa nell'unità di tempo attraverso la sezione unitaria AB quando si ha un gradiente di 1°C per unità di lunghezza.

Poché non si ha flusso, o dispersione, orizzontale di calore, il calore acquisito nell'unità di tempo da cilindro di sezione unitaria AB ed altezza dz (quindi volume dz) è uguale alla differenza dei flussi attraverso la facce: $B(Z+dz) - B(Z) = \frac{\partial B}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dz$.

Lo stesso calore acquisito dal volume compreso può essere espresso dal prodotto del calore specifico C per la massa data da ρdz per

l'incremento di temperatura $\partial \vartheta / \partial t$: eguagliando le due espressioni si ha

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) = c \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

La quantità $C\rho$ è detta "capacità termica volumetrica"; posto poi $a = \frac{\lambda}{C\rho}$ che ha le caratteristiche di coefficiente di conduttività "termometrica" si ricava $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)$.

Se può supporre costante il valore di a (cioè costanti con la profondità ed il tempo λ e $C\rho$, cosa non vera ad esempio quando il suolo pur omogeneo ha un contenuto variabile di umidità), la precedente equazione può scriversi $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$.

forma particolare dell'equazione generale della conduzione termica di Fourier.

Facendo l'ipotesi che la variazione primaria della temperatura sia alla superficie terrestre $z = 0$ e che ivi sia sinusoidale pura di ampiezza A_0 gradi centigradi intorno alla media ϑ_0 e periodo T , cioè

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_0 + A_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, \text{ e sfruttando mate}$$

maticamente la conseguenza fisicamente ovvia che a grande profondità la variazione periodica si annulla, si ha come noto la soluzione:

$$\vartheta(z, t) = \vartheta_0 + \left[A_0 \cdot e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{aT}}} \right] \sin \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{2} \sqrt{\frac{T}{a\pi}} \right) \right].$$

Se la variazione fosse, in modo più conforme alla realtà periodica ma non sinusoidale, la soluzione si esprimerebbe in serie di Fourier con armoniche di periodo $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, ecc.

La soluzione mette in evidenza quanto segue:

a) L'ampiezza dell'oscillazione termica diminuisce esponenzialmente: $A_z = A_0 \cdot e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{aT}}}$; il periodo si propaga senza alte

rarsi; la fase invece ritarda con un tempo di ritardazione dato da

$$t^* = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{T}{a\pi}}$$

la profondità z .

b) Il decremento dell'ampiezza e il tempo di ritardazione dipendono dal periodo dell'oscillazione imposto in superficie: precisamente la riduzione di ampiezza A_z / A_0 alla profondità z è proporzionale a

$\frac{1}{\sqrt{T}}$ e quindi le onde corte si smorzano prima. Ad esempio un uguale smorzamento delle onde termiche diurna ed annua (supposte sinusoidali) si ha alla profondità che per l'annuale è $\sqrt{365} = 19,1$ volte più grande che per la diurna. Analoga relazione si ha per i tempi di ritardazione, proporzionali a $\sqrt{T}$.

c) Il decremento dell'ampiezza e il tempo di ritardazione dipendono dalle caratteristiche del suolo sintetizzate dal coefficiente di conduttività termometrica $a = \frac{\lambda}{c\rho}$. Precisamente, la stessa riduzione

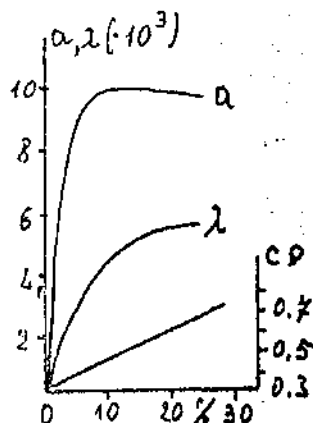
di ampiezza si ha a profondità proporzionali a $\sqrt{a}$, cioè

$$z_1 : z_2 = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2}$$

$$\text{e analogamente } t_{z_1}^* : t_{z_2}^* = \sqrt{a_1} : \sqrt{a_2}$$

Ovviamente nella realtà le proprietà termiche del suolo, cioè la capacità volumetrica $c\rho$ la conduttività calorimetrica λ , quindi anche la a , non sono costanti e variano in maniera complessa con la profondità e con il tempo, soprattutto in relazione all'umidità presente ed all'aria occlusa; ciò complica assai la trattazione teorica, che può essere estesa a qualche ipotesi semplice. Qualche cifra rende conto di ciò: per i componenti minerali del suolo la capacità termica varia poco attorno al valore $c=0,19$ cal/g. grado e la conduttività calorimetrica varia (di più) attorno al valore $\lambda = 10$ cal/cm .sec. grado, mentre per l'acqua tali quantità valgono $c=1$ e $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-3}$ e per l'aria $c \simeq 3 \cdot 10^{-4}$ e $\lambda \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ (nelle rispettive unità), perciò le variazioni percentuali di queste componenti del suolo apportano

forti variazioni nelle proprietà termiche del suolo. La figura dà, a scopo indicativo, gli andamenti di c_p , λ , a al variare del contenuto in acqua liquida (percentuale in peso) di un campione di terra argillosa fine.



La conoscenza delle proprietà termiche del terreno permette di dedurre la propagazione verso il basso delle oscillazioni di temperatura, ma viceversa possono anche essere dedotte dalla misura sperimentale degli andamenti di temperatura alla superficie e a varie profondità. Per valutare quali siano le profondità più opportune alle quali porre i geotermometri, possiamo dare ad a il valore medio di $10 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{sec}$ e deduciamo la profondità alla quale l'oscillazione termica diurna si riduce ad $1/10$ di quella in superficie:

$$A_z/A_0 = e^{-z\sqrt{\frac{\pi}{aT}}} = 0,1; \quad z = -\sqrt{\frac{8,64 \cdot 10^2}{3,14}} \cdot \log_e 0,1 = 16,6 \cdot 2,30 = 38,2 \text{ cm}$$

A tale profondità i massimi e minimi arrivano con un ritardo dato da

$$t^* = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{T}{a\pi}} = 19,1 \cdot 1,66 \cdot 10^3 \text{ sec} = 7^h 40^m \text{ circa,}$$

cioè ritardano in ragione di circa 1^h ogni 5 cm di discesa. Per l'oscillazione annua si ha rispettivamente $z = 7,30 \text{ m}$ e $t^* = 4^{\text{mesi}} 14^{\text{gi}}$ circa cioè un ritardo in ragione di circa 18 giorni ogni metro.

Lo strato del suolo, a partire dalla superficie, che è interessato alle oscillazioni termiche diurna o annuale è detto "strato attivo" del suolo: la temperatura al suo limite inferiore rimane dunque costante

e di lì cresce verso le regioni centrali della terra secondo un gradiente geotermico di circa $3^\circ / 100 \text{ m}$ nello strato roccioso (come si è già detto, questo comporta un flusso di circa $50 \text{ cal/cm}^2 \text{ anno}$).

Il flusso $B = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}$ dalla cui considerazione eravamo partiti, è determinato dunque dalle proprietà termiche e dalla distribuzione della temperatura nel suolo; esso pertanto è computato mediante i valori misurati direttamente oppure dedotti partendo da semplici osservazioni meteorologiche (vi sono formule empiriche al riguardo).

Per quanto riguarda il bilancio termico della superficie terrestre, il solo valore da considerare è quello di B per $z=0$; esso, nella marcia annuale, risulta positivo (cioè verso la superficie) per 7 mesi da settembre a marzo con un totale dell'ordine di 1.800 cal/cm^2 (una media dell'ordine di $20 \text{ cal/cm}^2 / \text{giorno}$ nel periodo culminante) e negativo nei restanti 5 mesi per un totale dello stesso ordine (una differenza di alcune decine di cal/cm^2 è dovuta al giuoco dell'acqua). Circa la media diurna, essa è fortemente variabile secondo l'epoca dell'anno e le condizioni meteorologiche, raggiungendo nell'ora del massimo flusso valori dell'ordine di $0,2 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$ e complessivamente nel giorno molte decine di cal/cm^2 in un senso e nell'altro.

Pochi cenni per la propagazione del calore nei mari, cioè per il termine W che sostituisce B in questo caso (pag. 42). La differenza è dovuta più al fatto che la propagazione è dovuta al rimescolamento turbolento in luogo della conduzione molecolare (che esamineremo nel caso dell'aria nel prossimo paragrafo), che non alla diversità delle condizioni di assorbimento ed emissione dell'energia radiante. Infatti l'acqua assorbe intensamente la radiazioni infrarosse ed emette con un coefficiente di emissività ϵ pari a $0,96$; cioè praticamente, come nel suolo, solo un sottile strato superficiale è interessato a questo scambio.

Peraltro diversa è la situazione per quanto riguarda la radiazione corta, cioè solare, che penetra assai più profondamente specie nel violetto ed ultravioletto. A causa del rimescolamento turbolento gli strati interessati alle oscillazioni termiche diurna e annua nel mare sono molto più profondi che nella terra dell'ordine rispettivamente di 15-20 m per la diurna e 200-300 m per l'annua. Di conseguenza l'ampiezza delle oscillazioni termiche viene fortemente limitata anche nel primo strato superficiale, ma ciò è molto in relazione alla profondità marina: in pieno oceano l'oscillazione diurna è di parecchi decimi di grado e quella annua di pochi gradi; mentre nei bacini di limitato spessore la diurna può essere di parecchi gradi e l'annua dello stesso ordine di quella su terraferma. Altro fattore di riduzione delle oscillazioni termiche è la maggiore capacità termica dell'acqua rispetto alla terra (circa quintupla quella di massa C , 2-3 volte quella di volume $C\rho$). Quanto al flusso termico W , in parte per questa maggiore capacità e più ancora per il rimescolamento termico, le larghe distese d'acqua sono in grado di accumulare calore 20-30 volte di più della terra: ad esempio nel Mar Baltico il flusso totale annuo positivo (ed anche il negativo) è stato misurato pari a circa 52.000 cal/cm^2 .

6- Analisi del termine L. Lo scambio di calore sensibile fra aria e superficie terrestre avviene con un meccanismo più complesso della conduzione molecolare operante nel suolo: questa in realtà sia ha anche nell'aria (dove sarebbe profondità di propagazione non superiore a tre volte quelle del suolo) ma viene mascherata, salvo casi molto rari di raffreddamenti notturni con totale assenza di vento e di brezze, dal fenomeno della turbolenza che può trasportare gli effetti dell'oscillazione termica diurna del suolo fino a quote di 1-2 e talvolta più Km.

Nell'atmosfera pertanto la turbolenza giuoca un ruolo del tutto preponderante, e conviene considerarla brevemente nella sua realtà fisica, oltre che in relazione al problema del termine L.

Lo studio del moto dell'atmosfera mostra che, innanzitutto, vi è attaccato alle pareti solide (terreno, muri, ecc) uno strato d'aria dello spessore di decimi o pochi millimetri che aderisce con grande tenacia al solido ed è chiamato "strato limite". Le leggi della diffusione turbolenta non sono valide entro tale strato di transizione fra la parete solida e l'aria libera, che invece è governato solo dalle leggi della fisica molecolare; in esso il calore è trasportato solo per conduzione ed il vapore solo per diffusione molecolare, come attraverso uno strato di sbarramento.

Al disopra dello strato limite, salvo i rari casi sopra ricordati, lo stabilirsi del moto turbolento in luogo di quello laminare dipende dal fatto che quando la velocità di una corrente supera un certo valore critico la viscosità del fluido non è più sufficiente a smorzare quelle perturbazioni del campo di velocità che sempre si producono per la non uniformità del flusso e per la rugosità delle pareti (tale limite è espresso da un valore critico del "numero di Reynolds" $Re = \frac{\ell V}{\nu}$ dove ℓ è una dimensione tipica, ad esempio della rugosità, V la velocità, ν la viscosità cinematica data dal coefficiente di viscosità diviso la densità; per l'aria il valore critico è circa 2.000).

Il moto turbolento si manifesta con una variazione ad ogni istante e luogo della direzione e velocità del vento (raffiche, convezione ecc.) Siano u, v, w (quest'ultima in verticale) i valori istantanei delle componenti del vento e siano $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ i loro valori medi calcolati in un intervallo di tempo lungo rispetto alle fluttuazioni turbolente, di modo che le componenti di queste fluttuazioni siano $u' = u - \bar{u}$; $v' = v - \bar{v}$; $w' = w - \bar{w}$ funzioni dello spazio e del tempo e aventi media zero $\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0$ in quell'intervallo.

Si suppone anche il moto d'insieme ~~non~~ stazionario, per cui sono costanti nel tempo i valori medi $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

Lo studio approfondito del moto turbolento parte appunto dall'esame delle due componenti u' , v' , w' ; uno studio di primo approccio invece, al quale qui ci limitiamo, può condursi più semplicemente al modo seguente:

La più importante conseguenza della turbolenza atmosferica è lo scambio verticale ed orizzontale di aria, con un rimescolamento che produce il trasporto di quantità fisiche quali la quantità di moto, il calore, il vapore acqueo, i polluenti atmosferici.

Per ricavare le relazioni più caratteristiche riguardanti la turbolenza consideriamo appunto il trasporto verticale di una generica grandezza di cui indichiamo con q la quantità contenuta nella massa d'aria unitaria, che sia distribuita omogeneamente sui piani orizzontali. Sia Q il flusso di tale grandezza attraverso l'unità di superficie orizzontale al livello Z nell'unità di tempo (da notare che la quantità di essa contenuta nell'unità di volume è ρq , essendo ρ la densità dell'aria). Consideriamo una superficie s abbastanza grande perchè attraverso essa passino nei due sensi ad ogni unità di tempo un grande numero N di "particelle d'aria", ogni particella essendo caratterizzata da un valore proprio della q . Sia q_i il valore di q per la i -esima particella di massa m_i , di modo che $m_i q_i$ è il suo trasporto della grandezza in esame; allora il trasporto complessivo attraverso s nell'unità di tempo sarà $\sum m_i q_i$, con l'avvertenza di dare ad ogni $m_i q_i$ il segno + o - a seconda che la particella i -esima salga o scenda; il flusso sarà $Q = \sum m_i q_i$.

Ora supponiamo che non vi sia vento verticale: ciò significa che le masse d'aria che attraversano s si compensano ($\sum m_i = 0$).

Se la q fosse costante con l'altezza, non vi sarebbe neppure trasporto verticale della grandezza; se invece la q è funzione dell'altezza,

tale trasporto non è nullo (anche se la situazione fosse stazionaria, cioè $q(z)$ costante nel tempo nell'intero strato considerato). Noi supponiamo dunque che la q sia funzione continua e derivabile di z e del tempo t . Supponiamo anche che la q sia una proprietà invariante della particella d'aria nel suo movimento dovuto alla turbolenza, notando che fra tutte le ipotesi fatte nella presente trattazione questa è la più debole, poiché presuppone l'assenza di scambi e trascinamenti fra le particelle d'aria in rimescolamento turbolento. Ma in tal caso il contenuto q_i della generica particella m_i sarà caratteristico del livello z_i dal quale la particella proviene, ed il trasporto complessivo attraverso la superficie s si calcolerà computando tutti i contributi. In una semplificazione di calcolo, accettabile in prima approssimazione, possiamo supporre che le particelle ascendenti $m_{i\uparrow}$ e discendenti $m_{i\downarrow}$ provengono tutte da due livelli medi, rispettivamente alle quote $z-l$ e $z+l$, che è lecito considerare equidistanti dalla s ; la l è chiamata "lunghezza di rimescolamento". Poiché non sia il trasporto complessivo di aria attraverso s , sarà

$\sum m_{i\uparrow} = \sum m_{i\downarrow} = \frac{1}{2} \sum m_i$ quanto alla grandezza in esame, confondendo nell'intervallo $z-l$ — $z+l$ la curva $q(z)$ con la sua tangente al livello z , si può come d'uso scrivere

$$q_{z-l} = q_z - \frac{\partial q}{\partial z} l; \quad q_{z+l} = q_z + \frac{\partial q}{\partial z} l.$$

Pertanto il trasporto netto attraverso s

(eccesso del trasporto ascendente sul discendente) è:

$$\left(\frac{1}{2} \sum m_i\right) \left(q_z - \frac{\partial q}{\partial z} l\right) - \left(\frac{1}{2} \sum m_i\right) \left(q_z + \frac{\partial q}{\partial z} l\right) = -l \frac{\partial q}{\partial z} \sum m_i$$

e il flusso (per unità di superficie e di tempo) è:

$$Q = -l \frac{\sum m_i}{s} \frac{\partial q}{\partial z}$$

Notiamo che possiamo considerare $\sum m_i$ proporzionale ad s e

perciò $\frac{\sum m_i}{s}$ è una grandezza legata solo alla vivacità della turbolenza, così come la l che può ritenersi legata alla velocità verticale turbolenta w' delle singole particelle. Ne deduciamo che

$$A = \frac{l \sum m_i}{s}$$

è una misura della turbolenza; essa è chiamata "coefficiente di scambio turbolento" ed ha le dimensioni $\text{g.cm}^{-1}.\text{sec}^{-1}$. Pertanto perveniamo alla relazione del flusso: $Q = -A \frac{\partial q}{\partial z}$, valida entro le ipotesi sopra dette, chiaramente schematiche ma accettabili in prima approssimazione (salvo forse quella della conservazione totale della individualità delle particelle in moto).

È facile rendersi conto che in assenza assoluta di turbolenza lo scambio sarebbe puramente molecolare ma sarebbe retto da un'equazione del tutto simile, però con un coefficiente di scambio che risulta dell'ordine di 10^{-5} volte più piccolo dei valori che normalmente ~~si~~ nell'atmosfera. Quando si consideri la turbolenza in sé, in luogo di A si adopera A/ρ che si chiama "coefficiente di turbolenza" o anche "viscosità vorticea"; ρ è la densità dell'aria.

La relazione $Q = -A \frac{\partial q}{\partial z}$ vale nel caso stazionario; nel caso invece di variazione della $q(z)$ nel tempo può esprimersi purché si consideri la situazione istantanea e purché, più opportunamente, si scriva $Q_z = -A_z \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_z$ (infatti nel caso della $q(z)$ stazionaria il flusso Q sarebbe uguale a tutte le quote).

Se la $q(z)$ non è stazionaria e si vuol rappresentare il processo nel tempo, nel caso generale, occorre rendere più completa la relazione ora ricavata. All'uopo consideriamo cosa avviene nel tempo dt entro un cilindretto verticale fra i livelli z e $z+dz$ di sezione unitaria e volume dz : il flusso attraverso la base inferiore è Q_z , attraverso la base superiore è

$$Q_{z+dz} = -A_{z+dz} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{z+dz} = -A_z \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial q}{\partial z} \right) dz.$$

Se la densità dell'aria è costante con la quota entro il cilindretto, non si ha il flusso attraverso le facce laterali e quindi la differenza dei due flussi ora scritti moltiplicata per dt rappresenta il guadagno entro il cilindretto

nel tempuscolo dt : ma tale guadagno produce un incremento nella grandezza, la cui quantità assoluta passa da $\rho q dz$ (essendo ρdz la massa d'aria), a $\rho \left(q + \frac{\partial q}{\partial t} dt \right) dz$.

Eguagliando le due espressioni si ha $-\frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial q}{\partial z} \right) dz \cdot dt = \rho \frac{\partial q}{\partial t} dt \cdot dz$;

semplificando e supponendo che A sia costante con l'altezza si ottiene l'espressione generale

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{A}{\rho} \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

che permette di determinare il comportamento della q nello spazio e nel tempo, se sono date le condizioni ai limiti (si noterà l'uguaglianza formale con la propagazione nel suolo vista nel paragrafo precedente).

Facciamo ora una prima applicazione delle cose dette alla analisi del termine L , quantità di calore che l'unità di superficie del suolo acquista nell'unità di tempo dell'aria per effetto della turbolenza (senza la quale sarebbe praticamente nullo). Questa quantità, a parte il segno, si identifica con il flusso di calore all'interno dell'atmosfera nei suoi primi strati; data la sua piccola capacità termica. Possiamo anzi per tali strati e per tale loro piccola incidenza termica considerare per essi il caso stazionario, in cui il flusso di calore è costante con la quota. Per applicare l'equazione generale dello scambio turbolento, dobbiamo considerare una grandezza q che sia legata allo scambio di calore, ma che sia anche invariante nei moti verticali delle particelle d'aria; tale grandezza non è la temperatura dell'aria T , mentre serve bene la temperatura potenziale θ (temperatura che la massa assume portata adiabaticamente alla pressione standard di 1.000 mb) in quanto i moti verticali turbolenti sono con buona approssimazione adiabatici. Dato che vale il caso stazionario $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$, possiamo considerare l'equazione del flusso: $Q = -A \frac{\partial q}{\partial z}$ e lo scambio di calore è $-L$ (per le convenzioni di segno fatte), tale flusso

di calore della superficie $Z=0$ porterebbe un aumento di θ (esattamente a 1000 mb, e con buona approssimazione ad altre pressioni, poichè comunque al suolo la pressione può considerarsi costante) pari a $-\frac{L}{c_p p}$ per il cubo di volume unitario; poichè invece θ non varia, ciò significa che il flusso di θ è appunto $-\frac{L}{c_p p}$; dunque ponendo in questo caso

q $\equiv\theta$ si ha $Q \equiv -\frac{L}{c_p p}$ e quindi l'equazione del flusso si scrive:

$$-\frac{L}{c_p p} = -A \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad \text{e ponendo} \quad -\frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma_\theta \quad \text{gradiente}$$

verticale della temperatura potenziale, si ha $-L = +A c_p p \gamma_\theta$

Conoscendo il valore delle quantità a secondo membro, poichè c_p e p sono note, A può valutarsi pari a 10^{-4} g. cm $^{-1}$.sec $^{-1}$ e γ_θ è misurabile, si ricava L .

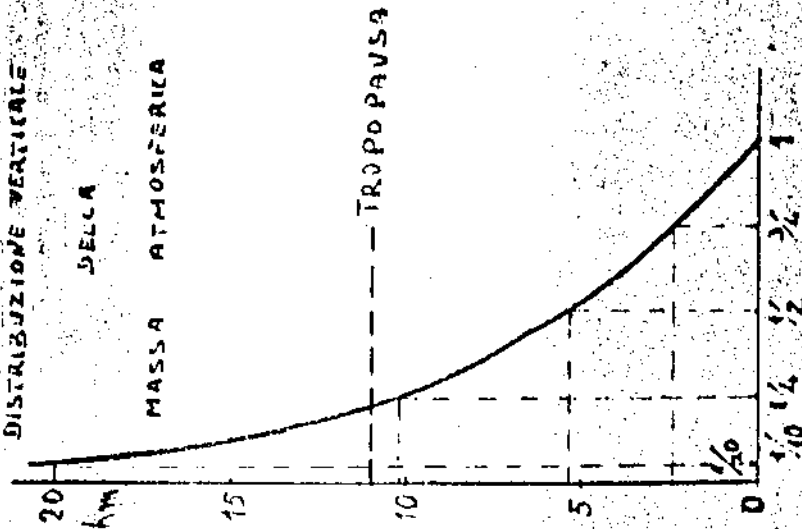
Come noto, detto Γ il gradiente adiabatico di temperatura pari a $1^\circ/100$ m, fra γ_θ ed il gradiente effettivo di temperatura γ_T corre la relazione: $\gamma_\theta = \gamma_T - \Gamma$. Per atmosfera adiabatica, cioè in equilibrio indifferente, si ha $\gamma_\theta = 0$ e quindi $L=0$; per atmosfera superadiabatica $\gamma_T > \Gamma$ (instabile) è $L < 0$ cioè il suolo cede calore all'aria come avviene nelle ore di maggiore insolazione; per atmosfera stabile $\gamma_T < \Gamma$ è $L > 0$ cioè il suolo assorbe calore dall'aria. Nella realtà, dato l'assorbimento radiativo dell'aria ed altre influenze, il gradiente termico cui corrisponde $L=0$ non è quello adiabatico ma uno minore, di modo che nel bilancio annuo L ha un valore negativo.

7- Analisi del termine V - In generale il termine V , cioè lo scambio di calore fra superficie terrestre ed aria sottoforma di energia latente

DISTRIBUZIONE VERTICALE

DELLA

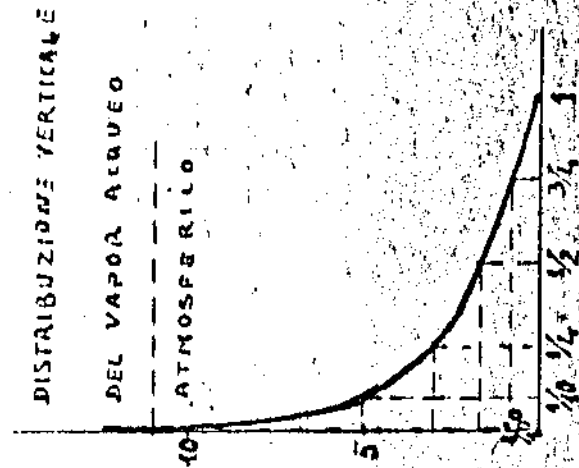
MASSA ATMOSFERICA



DISTRIBUZIONE VERTICALE

DEL VAPORE ACQUO

ATMOSFERICO



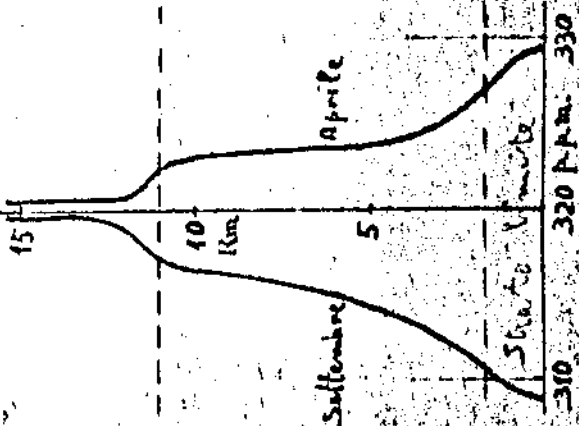
ANIDRIDE CARBONICA *

VARIAZIONE STAGIONALE

STRATOSPHERA

TROPOPAUSA

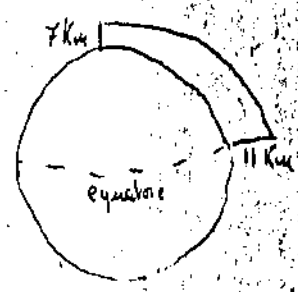
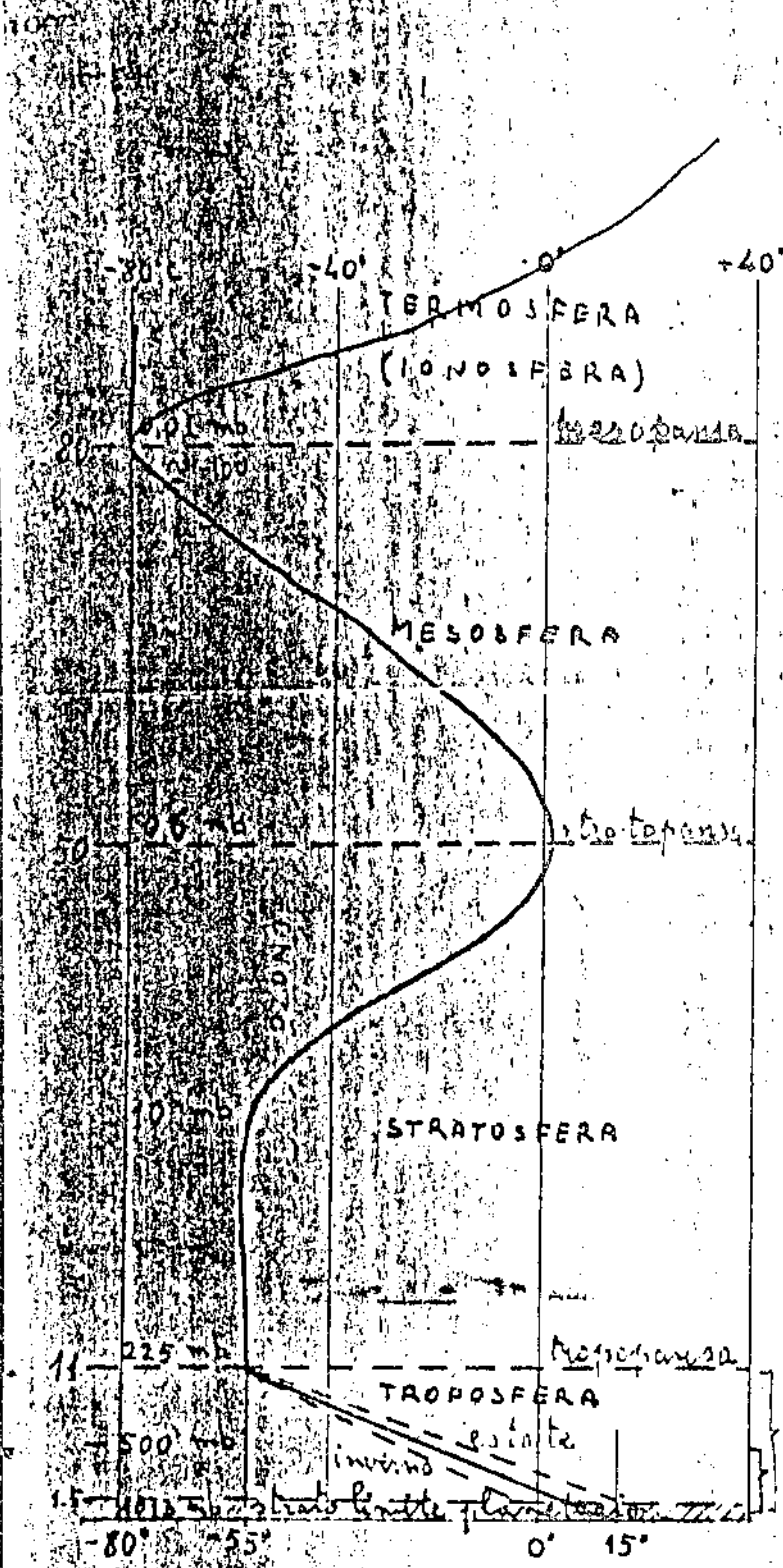
TROPOSPERA



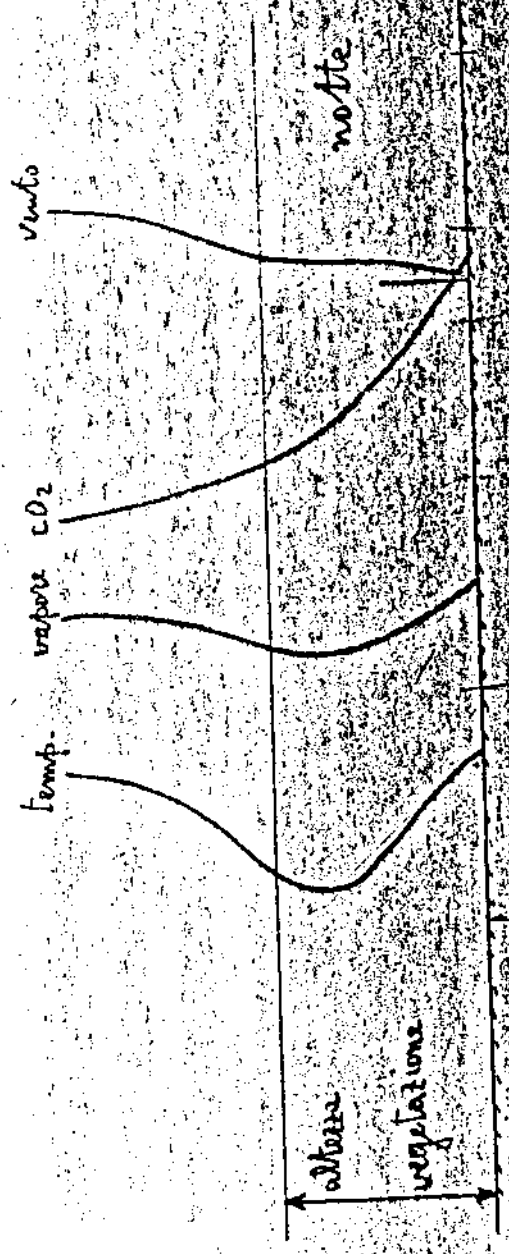
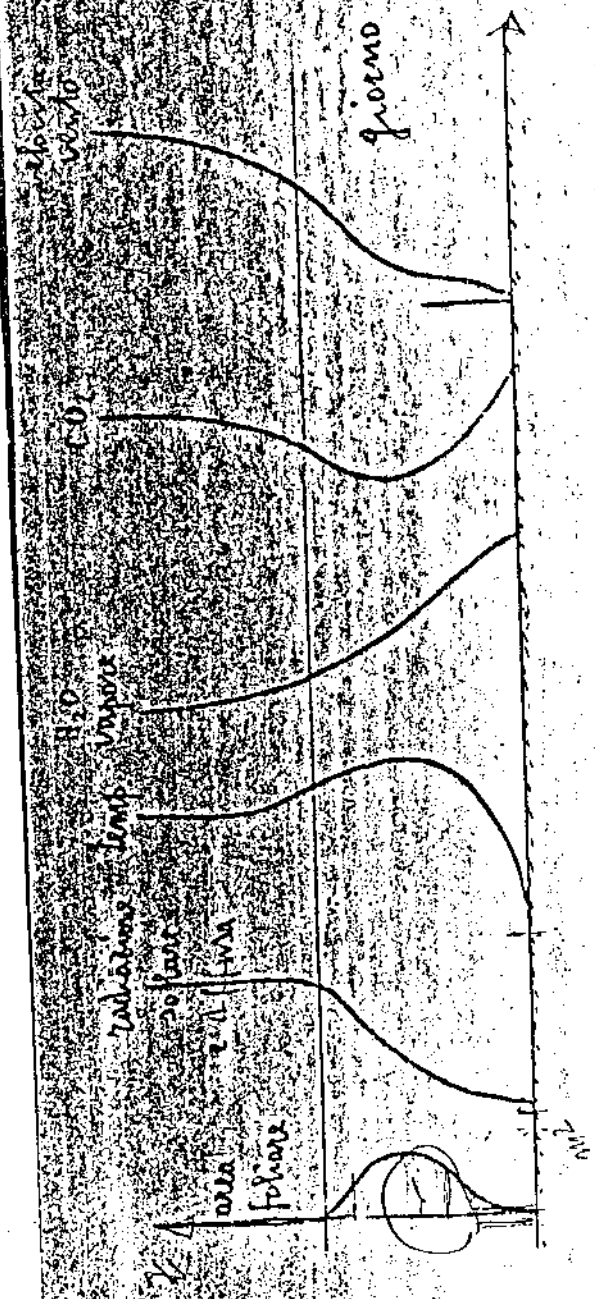
STRATO LIMITS
PLANETARIO

310 320 ppm 330

parti per milione
di CO_2 in aria

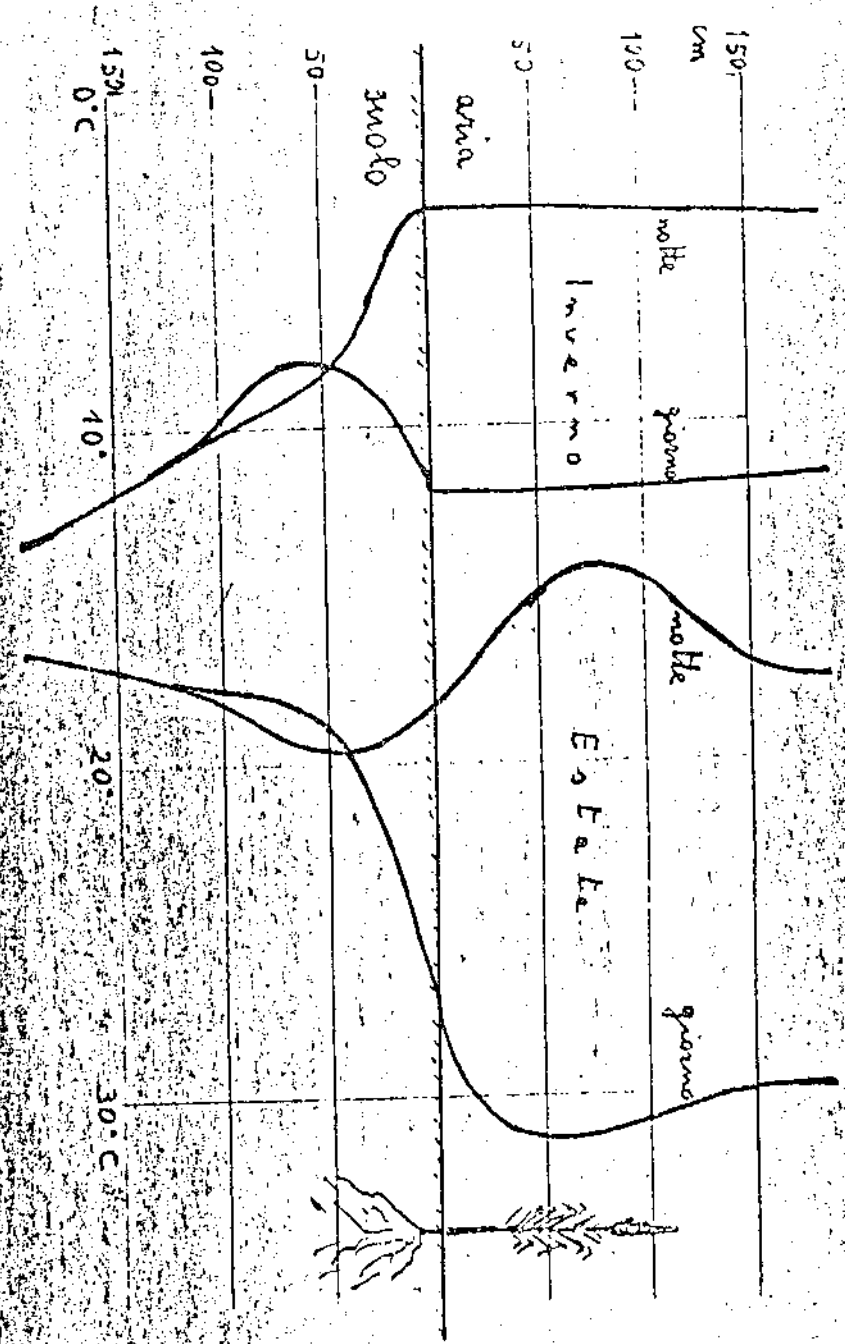


$\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{7}$ dell'area
dell'area



Profilo entro la massa vegetale (mass)

Andamento della temperatura ora suolo con regolazione umana



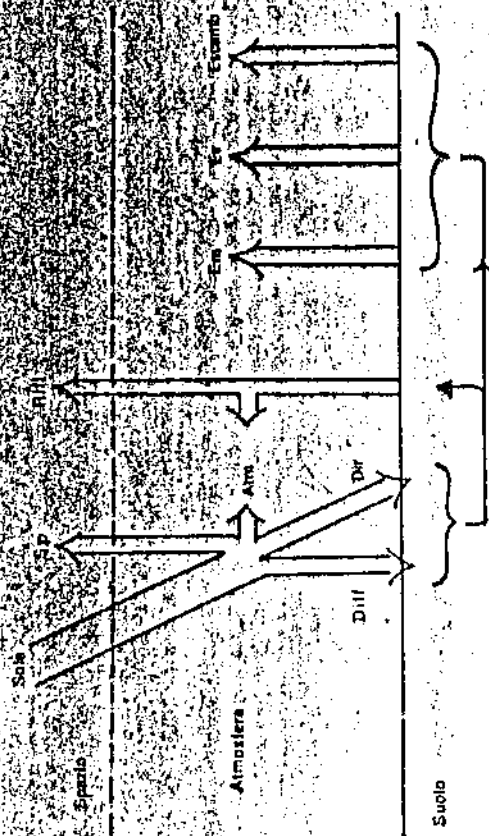


Fig. 1 - Bilancio energetico di un ettaro di suolo in Italia, in condizioni di media nuvolosità all'inizio della primavera, espresso in milioni di gradi calorie per ettaro per giorno.

Sole:	energia che arriva dal sole ai limiti dell'atmosfera	72.10° Kcal/ha giorno
Sp:	parte riflessa dall'atmosfera verso lo spazio	22.10° Kcal/ha giorno
Atm:	parte assorbita dall'atmosfera	13.10° Kcal/ha giorno
Dia:	parte che arriva direttamente al suolo	19.10° Kcal/ha giorno
Diff:	parte che arriva indirettamente al suolo per diffusione dell'atmosfera	18.10° Kcal/ha giorno
Rifl:	parte dell'energia arrivata al suolo che viene riflessa verso l'alto	4.10° Kcal/ha giorno
Ass:	energia assorbita dal suolo (Dia + Diff - Rifl)	33.10° Kcal/ha giorno
Em:	energia persa dal suolo per emissione termica verso l'alto e energia emessa dall'atmosfera verso il basso	12.10° Kcal/ha giorno
Ev:	energia persa dal suolo a causa dell'evaporazione	12.10° Kcal/ha giorno
Escamb:	energia trasferita dal suolo all'atmosfera per scambio di calore	7.10° Kcal/ha giorno

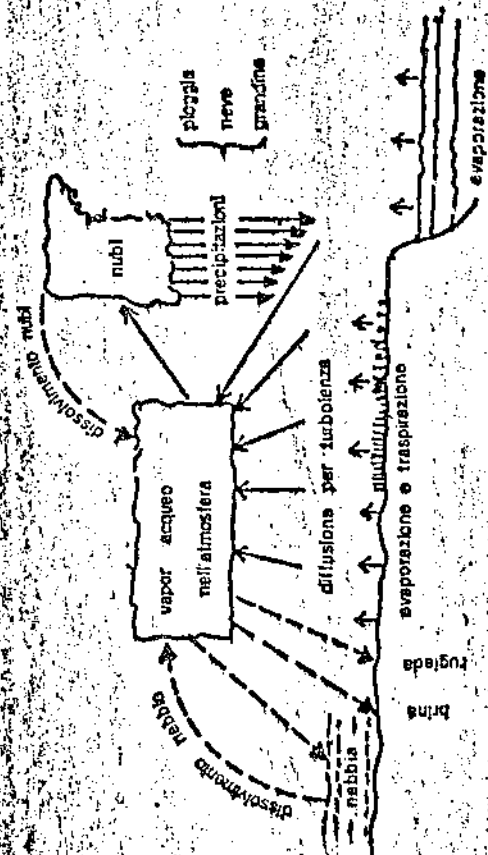


Fig. 1 - Ciclo dell'acqua nell'atmosfera

P A R T E III

Estratto dalle "Lezioni del corso di
meccanica e termodinamica dell'atmosfera
tenute dal Prof. G. Fea e raccolte da
G. Capodicasa, A. Genovese, E. Rossi (A.A.
1972-73)".

I. LEZIONE.

Vapor d'acqua nell'atmosfera. Pressione di vapore saturo e suo andamento. Formula di Clapeyron. Il principio della termodinamica. Umidità assoluta. Rapporto di mescolanza. Isoigrometriche. Equazione di stato per aria umida. Temperatura virtuale e suo significato.

Nello studio della statica dell'atmosfera abbiamo considerato il caso generale dell'atmosfera a composizione variabile, cioè con peso molecolare variabile e abbiamo per questo motivo introdotto i concetti di "altezza di scala" e di temperatura molecolare (T_m) a cui corrisponde un supposto peso molecolare costante (M_s).

Prendendo in considerazione l'atmosfera e in particolare la troposfera possiamo considerare il caso particolare di una atmosfera sempre a composizione costante: un'aria secca a composizione costante dove si trovi in quantità maggiori o minori il vapor d'acqua, unico elemento variabile. Ciò prendiamo in considerazione l'aria umida come costituita da un miscuglio di aria secca (nella sua nota composizione di azoto, argon, etc. che supponiamo costante) che interviene per circa il 97÷99% e di vapor d'acqua che interviene per la restante percentuale.

Ricordando che:

$$(1) R_a = \frac{R^*}{M_a} = \frac{8314}{28,96} = 287 \frac{\text{Joule}}{\text{°K} \cdot \text{kg}}$$

Costante dei gas per
aria secca

$$(2) R_v = \frac{R^*}{M_v} = \frac{8314}{18} = 461 \frac{\text{Joule}}{\text{°K} \cdot \text{kg}}$$

Costante dei gas per
vapor d'acqua

$$(3) D = \frac{R_a}{R_v} = \frac{M_v}{M_a} = \frac{18}{28,96} = 0,622$$

Rapporto tra peso
molec. del vapor e peso
mol. dell'aria secca

Precisiamo il significato di alcuni simboli:

p = pressione dell'aria umida, miscuglio di aria secca e vapore

p_A = pressione parziale dell'aria secca

e = pressione parziale del vapore d'acqua

Ricordiamo la legge di Dalton: un miscuglio di gas (che non agiscono chimicamente tra loro) esercita una pressione che è la somma delle pressioni che ciascun gas eserciterebbe se occupasse da solo tutto il volume del miscuglio.

Per la legge di Dalton si ha: $p = p_A + e$

Si suole indicare con e la pressione effettiva parziale del vapore d'acqua di una miscela di aria umida non satura; si indica invece con E la pressione effettiva parziale del vapore d'acqua di una miscela di aria satura; ovviamente E è funzione soltanto della temperatura; sarà $E = E(T)$ ed inoltre: $e \leq E(T)$ dove il segno di uguaglianza vale per l'aria satura.

La $E(T)$ è del tipo $E \approx E_0 e^{k_r (t - t_0)}$ dove E_0 è la pressione di vapore satura alla temperatura di riferimento T_0 ; questa relazione è soltanto approssimata, ma è sufficiente per quanto ci riguarda.

Prima di inoltrarci nello studio dell'apporto del vapore d'acqua nell'atmosfera definiamo alcune grandezze isoiometriche fondamentali:

UMIDITA' SPECIFICA (o CONTENUTO DI VAPORE)

Una delle grandezze fondamentali della termodinamica della atmosfera è il "contenuto di vapore" o "umidità specifica" definita come il rapporto fra la massa di vapore (m_v) contenuta in una certa massa di aria secca (m_A) e la massa totale (m) del miscuglio; si tratta quindi di una grandezza adimensionale;

la indichiamo con q' (ricordando che si suole metterla l'apice per indicarsi che l'unità di misura usata è kg/kg; non si metta l'apice se l'unità di misura adoperata è gr/kg) Si ha:

$$(4) \quad q' = \frac{m_v}{m} = \frac{m_v}{m_a + m_v}$$

Possiamo scrivere l'equazione dei gas perfetti per l'aria secca e per il vapor d'acqua:

$$(5) \quad p_a V = m_a R_a T$$

$$(6) \quad e V = m_v R_v T$$

Ricavando da queste m_a e m_v e sostituendole nella (4) si ha:

$$(4') \quad q' = \frac{m_v}{m} = \frac{m_v}{m_a + m_v} = \frac{\frac{eV}{R_v T}}{\frac{p_a V}{R_a T} + \frac{eV}{R_v T}}$$

Semplificando e moltiplicando numeratore e denominatore per $R_a T$ si ha:

$$(4'') \quad q' = \frac{e \frac{R_a}{R_v}}{p_a + e \frac{R_a}{R_v}} = \frac{R_a}{R_v} \frac{e}{p_a + \frac{R_a}{R_v} e} = D \frac{e}{(p - e) + D \cdot e} = D \frac{e}{p - (1-D)e}$$

ed essendo $D=0,622$, $1-D=0,378$ si ottiene:

$$(7) \quad q' = D \frac{e}{p - (1-D)e} = 0,622 \frac{e}{p - 0,378 \cdot e}$$

Poichè in realtà e è molto piccolo rispetto a p si può, in prima approssimazione, trascurare il 2° termine del denominatore della (7) da cui segue:

$$(8) \quad q' \simeq D \frac{e}{p} = 0,622 \frac{e}{p}$$

Quando l'aria è satura (si usano le lettere maiuscole) questa grandezza si scrive:

$$(9) \quad Q' = D \frac{E(t)}{p - (1-D)E(t)} \simeq D \frac{E(t)}{p}$$

Queste grandezze (q' e Q') espresse in kg di vapore per kg di aria che entrano nei calcoli dove si usano le unità MKS non sono pratiche.

In pratica si usano espressioni in grammi di vapore per chilogrammi di aria; si ha (usando le notazioni senza apice):

$$q \approx 10^3 \Delta \frac{e}{p} \quad Q \approx 10^3 \Delta \frac{E(T)}{p}$$

Per avere un'idea pratica dell'ordine di grandezza dell'umidità specifica facciamo un esempio:

si abbia aria saturata 1000 mb e a 0°C; sarà $E(T) = E(0^\circ) = 6,1 \text{ mb}$ per cui: $Q = 10^3 \cdot 0,622 \cdot \frac{6,1}{1000} \approx 3,6 \frac{\text{grammi di vapore}}{\text{kilogrammo d'aria}}$

Applicando la formula non approssimata si avrebbe:

$$Q \approx 10^3 \cdot 0,622 \cdot 6,1 \cdot 10^{-3} \approx 3,6 \frac{\text{grammi di vapore}}{\text{kilogrammo d'aria}}$$

Poiché la pressione di vapore saturo $E(T)$ cresce esponenzialmente con la temperatura e si raddoppia all'incirca ogni dieci gradi, alla pressione di 1000 mb il contenuto di vapore sarà $3,6 + 3,6 \approx 7 \text{ gr/kg}$ a $+10^\circ$, sarà 14 gr/kg a 20°C e circa 30 gr/kg a $+30^\circ\text{C}$; da questi calcoli si può vedere che il contenuto di vapore (o umidità specifica) è sempre molto piccolo, cioè al massimo può essere il 2-3%, notiamo che il 3% vuol dire (30 gr/kg) avere nebbia (aria saturata, con temperatura di oltre $+30^\circ\text{C}$) il che è eccezionale o quasi anche all'equatore. Il contenuto medio di vapore è dell'ordine del grammo per kg di aria, cioè è dello stesso ordine di grandezza dell'argon (che è 1%): questo fatto mostra come una quantità così piccola, da sembrare quantitativamente trascurabile, di vapore d'acqua produca degli effetti imponenti nei processi che intervengono nell'atmosfera.

UMIDITA' RELATIVA.

Altra grandezza igrometrica è l'umidità relativa definita come il rapporto tra la massa effettiva del vapore contenuto nell'aria e la massa di vapore saturo che vi potrebbe essere contenuta alla stessa temperatura. Sarà cioè:

$$\text{umidità relativa} = u = \frac{w_v}{w_{vs}} = \frac{\text{massa d'vapore}}{\text{massa d'vapore saturo}}$$

Tenendo conto della (6) si ha:

$$(10) \quad u = \frac{w_v}{w_{vs}} = \frac{\frac{eV}{R_v T}}{\frac{E(T)V}{R_v T}} = \frac{e}{E(T)}$$

In pratica l'umidità relativa si dà in percentuale, moltiplicando $u \times 100$.

TEMPERATURA DI RUGIADA.

La (10) ci permette di definire la temperatura di rugiada (che indichiamo con T_d): è la temperatura alla quale occorre raffreddare l'aria a pressione costante perchè diventi satura. Dalla discende che la pressione di vapore effettiva (e) uguaglia la pressione di vapore saturo alla temperatura di rugiada; cioè: l'umidità relativa è 1 cioè massima quando $e = E(T) = E(T_d)$.

RAPPORTO DI MESCOLOANZA.

Altra grandezza isoigrometrica è il "rapporto di mescolanza" definito come la massa di vapore per unità di massa d'aria secca; si indica con X' ; sarà:

$$(11) \quad X' = \frac{w_v}{w_a} = \frac{e}{p-e} = 0,622 \frac{e}{p-e}$$

Confrontando la (11) con la (8) si vede come il rapporto di mescolanza si confonde numericamente con l'umidità specifica.

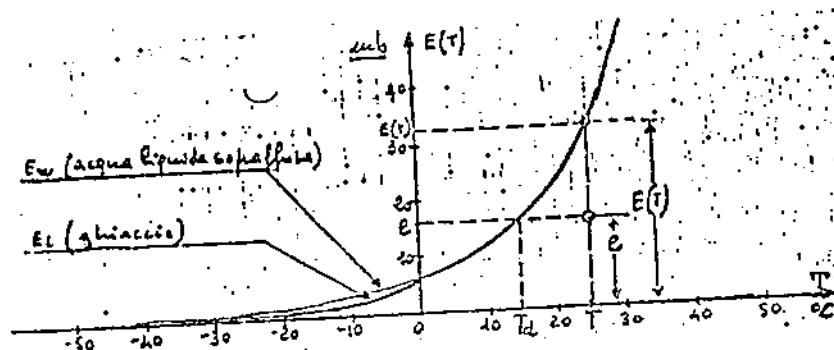
UMIDITA' ASSOLUTA.

Si indica con a . Altra grandezza isoigrometrica, poco usata in meteorologia, è l'umidità assoluta definita come la massa di vapore contenuta nell'unità di volume d'aria. Si ha:

$$a = \frac{mv}{V} = \frac{\frac{eV}{R_v T}}{V} = \frac{e}{R_v T} = \rho_v$$

Quindi l'umidità assoluta coincide praticamente con la densità del vapore. L'unità di misura nel sistema MKS è kg/m^3 .

PRESSIONE DI VAPOR SATURO E SUO ANDAMENTO



Abbiamo visto (pag.) che l'andamento della pressione di vapore saturo rispetto alla temperatura è del tipo esponenziale; ed esiste la seguente relazione approssimata: $E = E_0 e^{k_s(T-T_0)}$. Supponiamo di essere a una certa temperatura ambiente T (nell'esempio di figura $T=25^{\circ}\text{C}$) con una pressione effettiva di vapore e (17mb); la pressione del vapore saturo alla temperatura T è $E(T)$ (33mb); se raffreddiamo la massa considerata, cioè

facciamo scendere la T si arriva ad un certo punto in cui la pressione di saturazione uguaglia quella ambiente; questo punto corrisponde alla temperatura T_d (in figura $+14^\circ\text{C}$ che abbiamo definito come "temperatura di rugiada").

Uno dei sistemi per misurare la pressione di vapore ambiente è proprio quello descritto: si raffredda l'aria fino a che si raggiunga l'inizio di saturazione e si misura la temperatura del momento che è la T_d (lo strumento adoperato è l'igrometro a condensazione).

Riprendendo la (10), che esprime l'umidità relativa, possiamo scrivere (vedi figura):

$$u = \frac{e}{E(t)} = \frac{E(T_d)}{E(t)} \approx \frac{E_0 e^{k_v(T_d - T_0)}}{E_0 e^{k_v(T - T_0)}} = e^{k_v(T_d - T)}$$

da cui:

$$\ln u = \ln \frac{e}{E(t)} \approx k_v(T_d - T)$$

quindi in prima approssimazione abbiamo che: il logaritmo naturale dell'umidità relativa è proporzionale alla differenza fra la temperatura di rugiada e la temperatura ambiente di una massa d'aria.

In pratica $u \leq 1$ (cioè $U\% \leq 100$) per cui $T_d \leq T$ poichè l'aria è non satura o satura. Fenomeni di sovrassaturazione sono eccezionali: nei bassi strati non esiste la sovrassaturazione che invece negli alti strati dell'atmosfera talvolta è presente.

Abbiamo visto che l'aria si può considerare un gas perfetto (almeno nelle condizioni di temperatura e pressione che intervengono in meteorologia); possiamo scrivere l'equazione di

stato dei gas perfetti, si ha:

$$p_A = \frac{p_A}{R_A T} \quad s_v = \frac{e}{R_v T} \quad p = \frac{p}{RT}$$

ARIA SECCA VAPORE D'ACQUA

(dove ricordiamo che $p = p_A + e$ ed $m = m_A + m_v$)

Scriviamo l'equazione di stato dei gas perfetti per l'aria umida, cioè per il miscuglio di aria secca e di vapore; si ha:

$$pV = (p_A + e)V = (m_A R_A + m_v R_v)T$$

mettendo in evidenza R_A e ricordando che $\frac{R_v}{R_A} = \frac{1}{D}$ si ha:

$$\begin{aligned} pV &= (p_A + e)V = (m_A R_A + m_v R_v)T = R_A \left(m - m_v + m_v \frac{R_v}{R_A} \right) T = \\ &= m R_A \left[1 - \frac{m_v}{m} \left(1 - \frac{R_v}{R_A} \right) \right] T = m R_A \left[1 + \frac{m_v}{m} \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \right] T = \\ &= m R_A \left[1 + q' \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \right] T = m R_A (1 + \delta' q') T \end{aligned}$$

Si è posto

$$\delta' = \frac{1}{D} - 1 = \frac{1}{0,622} - 1 \approx 0,6 \quad \left[e q' = \frac{e}{k_g} \right]$$

(Se il contenuto di vapore si vuole esprimere in gr/kg si da a δ il valore di $0,6 \cdot 10^{-3}$)

L'equazione di stato dei gas perfetti per l'aria umida è quindi:

$$(12) \quad pV = m R_A (1 + \delta' q') T$$

Possiamo pensare di fare tutte le operazioni relative all'aria con vapore applicando la (12) dove interviene il fattore $(1 + \delta'q)$ maggiore dell'unità; ma in pratica si preferisce considerare l'aria come fosse secca ma sostituendo alla temperatura T una nuova temperatura che tiene conto del fattore $(1 + \delta'q)$; questa nuova temperatura prende il nome di "TEMPERATURA VIRTUALE" ed è definita dalla relazione:

$$(13) \quad T_v = (1 + \delta q) T$$

La temperatura virtuale è la temperatura che deve assumere una massa d'aria secca perchè abbia la stessa densità di una data massa d'aria umida.

Abbiamo visto che il fattore $(1 + \delta q)$ è positivo e maggiore dell'unità per cui $T_v > T$; possiamo scrivere, calcolandola facilmente, la correzione da aggiungere a T per avere T_v ; sarà: (ricordando che $q = Qu$)

$$\Delta T_v = T_v - T = \delta q T = \delta Q u T$$

ΔT_v sarà massimo quando l'aria è satura; lo indichiamo ΔT_{vs} , correzione per la temperatura virtuale di saturazione, e sarà:

$$\Delta T_{vs} = T_{vs} - T = \delta Q T = 6 \cdot 10^{-4} \cdot 300 \cdot Q \approx 0,2 Q$$

(Ricordiamo che

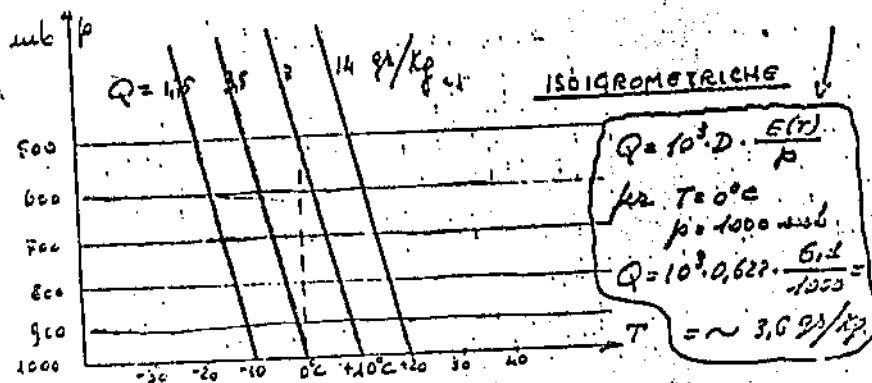
$$q = \Delta \frac{e}{p} ; Q = \Delta \frac{E}{p} ; \frac{q}{Q} = u ; q = Q \cdot u$$

Segue ancora:

$$\Delta T_v = \Delta T_{vs} \cdot u$$

ISOIGROMETRICHE.

Nel diagramma di Stüve le linee rosse leggermente inclinate a sinistra rappresentano i punti di ugual contenuto di vapore saturo, cioè $Q \approx D \frac{E(T)}{p}$; sono le isoigrometriche. Ricordiamo che il contenuto di vapore per aria saturo, Q , è funzione soltanto della temperatura e della pressione, quindi se si dimezza la pressione p (per esempio da 1000 a 500mb) si deve dimezzare anche $E(T)$, per dimezzare $E(T)$ la T deve scendere di 10 gradi (ricordiamo che l'andamento della pressione di vapore saturo, esponenzialmente, è tale che si raddoppia per un aumento di dieci gradi di temperatura).



Pertanto la isoigrometrica passante per 1000mb e $+20^\circ\text{C}$ passerà per 500mb alla temperatura $+10^\circ\text{C}$; le altre isoigrometriche saranno parallele a questa e vanno infittendosi esponenzialmente verso destra. Infatti poichè E cresce esponenzialmente con la temperatura, a pressione costante deve essere il contenuto di vapore a crescere esponenzialmente con la temperatura.

Concludendo si può operare con l'aria umida come se l'aria fosse secca immaginando la temperatura un po' più alta di un ΔT_v che è proporzionale al contenuto di vapore.

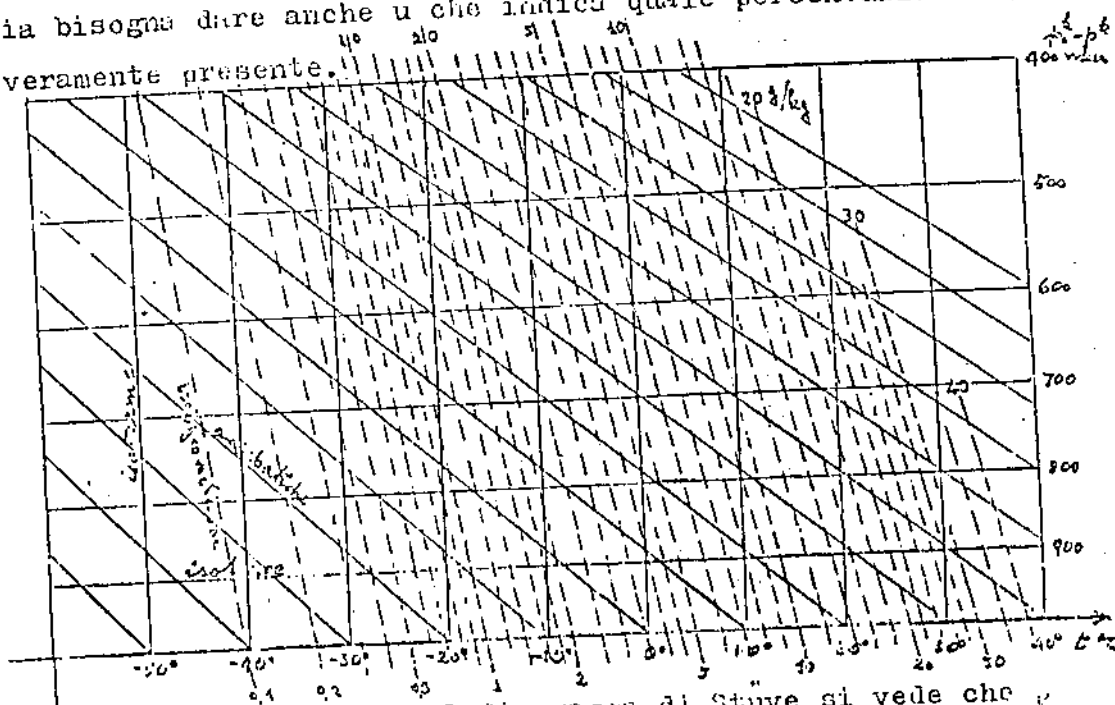
Esempio: si abbia una massa d'aria satura contenente 10gr di vapore per kg d'aria; la correzione sarà $0,2 \cdot 10 = 2$ gradi; bisogna aggiungere due gradi alla temperatura per avere la temperatura virtuale; cioè l'aria satura si comporta come fosse secca, ma più calda di due gradi.

Questo fatto avviene perchè la densità dell'aria umida è più bassa della densità dell'aria secca a parità di pressione totale e di temperatura perchè una parte delle molecole dell'aria sono sostituite da molecole d'acqua che pesano meno; (l'aria pesa circa 29 mentre l'acqua pesa 18).

Infatti la densità dell'aria secca è: $\rho_A = \frac{A}{R_A T}$
 e la densità dell'aria umida è: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{R_A T_v}$
 se poniamo $\rho = \rho_A$ e $p = p_A$ sarà $T_v = T$ cioè T_v è la temperatura che deve avere una massa d'aria secca perchè acquisti la densità dell'aria umida.

L'introduzione della temperatura virtuale rende comodi e facili i calcoli degli spessori degli strati dell'atmosfera, infatti la tabella degli spessori degli strati in funzione degli strati considerati (1000/300 900/800....) e della temperatura dell'aria secca possono essere utilizzati anche per l'aria umida purchè si introduca la T_v al posto della T ; o meglio si aggiunga la correzione ΔT_v .

Fissato un punto del diagramma di Stüve, cioè data una temperatura e una pressione, l'isoigrometrica passante per il punto dice subito qual'è la quantità di vapore che in quelle condizioni di p e T saturerebbe l'aria. Se si vuol sapere anche lo stato igrometrico effettivo di quella particella di aria bisogna dare anche u che indichi quale percentuale di Q è veramente presente.



Guardando attentamente sul diagramma di Stüve si vede che pressapoco a 950mb esistono una fila orizzontale di pallini numerati 0,1 , 0,2 , 0,5 , 1, 2, 3 , 4, 5, Essi indicano per lo strato 1000/900 la correzione ΔT_v da apportare alla temperatura per avere la T_v ; è evidente che se si vuole la T_v bisogna conoscere l'umidità relativa u e apportare al ΔT_v la correzione per l'umidità prima di sommarlo a T . Lo stesso vale anche per gli strati superiori. L'andamento dei pallini ΔT_v è parallelo all'andamento delle isoigrometriche, accanto, un po' a destra, alla isoigrometrica $Q=5\text{gr/kg}$

abbiamo il pallino 1, infatti $\Delta T_v \approx 0,2 \cdot Q \approx 0,25 = 1$ e questa relazione vale per tutte le quote. Sul diagramma la serie dei pallini è disposta più volte per comodità a vari livelli, ma da quanto detto, è chiaro che bastava segnarli una sola volta ciò per far presente che il calcolo degli strati si può fare anche per gli spessori a cui non corrisponde la serie dei pallini.

È importante notare che il vapore conta molto alle alte temperature; alle basse conta poco, ma non è il caso di trascurarlo. Quando si parla di spessore di strati, di densità dell'aria, etc., anche se non si esplicita quando si dice temperatura ci si riferisce sempre alla temperatura virtuale.

Se vogliamo vedere la spinta di Archimede di una certa massa d'aria ci si deve riferire alla temperatura virtuale della massa in esame e alla temperatura virtuale dell'ambiente perché quello che conta è la differenza delle due T_v e non delle T semplicemente.

Quando abbiamo trattato "gli spessori" senza tener conto del vapore si è visto quale effetto ha anche una piccola variazione di temperatura sugli spessori; ora si aggiunge la necessità di non dover trascurare la presenza del vapore che attraverso la ΔT_v influisce notevolmente su tutti i calcoli.

1° E II° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA.

Il primo principio della termodinamica è il principio della conservazione dell'energia applicato alla termodinamica. Stabilito su basi sperimentali (Joule) l'equivalenza tra calore ed energia come risulta evidente sulla base dei cicli, siccome quando le trasformazioni non sono cicliche non sempre ad una certa quantità di calore fornito corrisponde una certa quantità di lavoro ottenuto, allora è stato introdotto il concetto di energia interna per salvare il principio di conservazione dell'energia. Nelle trasformazioni aperte si dice che quella parte di energia che non compare come lavoro sull'esterno è rimasta all'interno ad incrementare l' "Energia interna" del sistema.. Si ha:

$$(14) \quad \delta Q = \delta L + dU$$

Ricordiamo la relazione per passare da Joule a grande calorìa (A) e viceversa:

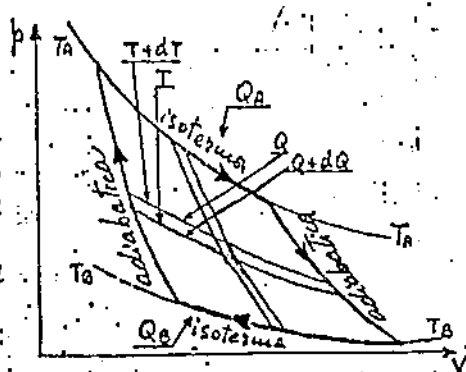
$$J = 4186,84 \frac{\text{Joule}}{\text{cal}} \quad ; \quad A = 9,0002389 \frac{\text{cal}}{\text{Joule}}$$

Il secondo principio della termodinamica può essere espresso in vari modi; un modo è dire che: "i sistemi isolati evolvono nel senso nel quale l'entropia aumenta o al più resta costante". (Resta costante per trasformazioni reversibili, aumenta per trasformazioni irreversibili.) In termini molecolari si dice che "il sistema tende a evolvere verso lo stato più probabile".

In modo meno raffinato il secondo principio si può esprimere così:

$$(15). \quad \frac{\mathcal{L}}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_B}{Q_A} \stackrel{\text{inv}}{\leq} \frac{T_A - T_B}{T_A}$$

Cioè: se si effettua una trasformazione ciclica tra due sorgenti (una calda A e una fredda B) il lavoro ottenuto ($\mathcal{L}$) sta al calore assorbito dalla sorgente calda (Q_A) come il salto di temperatura tra le due sorgenti ($T_A - T_B$) sta alla temperatura della sorgente calda (T_A), ciò vale per trasformazioni reversibili (nella formula scritta vale il segno di uguaglianza). Se invece la trasformazione è irreversibile il rapporto tra il lavoro ottenuto ($\mathcal{L}$) e il calore assorbito dalla sorgente calda (Q_A) è inferiore al rapporto tra il salto di temperatura ($T_A - T_B$) e la temperatura della sorgente calda (nella formula vale il segno di disuguaglianza). Quanto detto vale sia per cicli finiti che per cicli infinitesimi. Ad esempio consideriamo un ciclo reversibile (di un gas per-



fetto) costituito da due isoterme raccordate da due adiabatiche; sia A la sorgente calda e B la sorgente fredda; gli scambi di calore devono avvenire soltanto con le due (sole) sorgenti, non con l'ambiente per cui sono necessarie le adiabatiche; alla sorgente calda viene scambiato il calore Q_A alla temperatura T_A ; alla sorgente fredda viene scambiato il calore

Q_B alla temperatura T_B ; è evidente che Q_A è positivo (calore fornito dalla sorgente al sistema), e Q_B è negativa (calore

re sottratto dalla sorgente fredda, o pozzo, al sistema.)
Possiamo considerare, oltre al caso del ciclo finito, il caso del ciclo con isoterme finite ed adiabatiche infinitesime e viceversa il caso del ciclo con isoterme infinitesime ed adiabatiche finite.

Nel caso del ciclo finito, se è reversibile, si ha:

$$\frac{Q_B}{Q_A} = - \frac{T_B}{T_A}$$

Nel caso del ciclo con isoterme infinitesime ed adiabatiche finite si ha:

$$\frac{\delta Q_B}{\delta Q_A} = - \frac{T_B}{T_A}$$

Nel caso del ciclo con isoterme finite ed adiabatiche infinitesime si ha:

$$\frac{Q_B}{Q_A} = - \frac{dT_B}{dT_A}$$

Infine nel caso di un ciclo tutto infinitesimo si ha:

$$\frac{\delta Q}{Q + \delta Q} = \frac{dT}{T + dT}$$

Gli infinitesimi ai denominatori sono trascurabili rispetto ai termini finiti per cui si ha:..

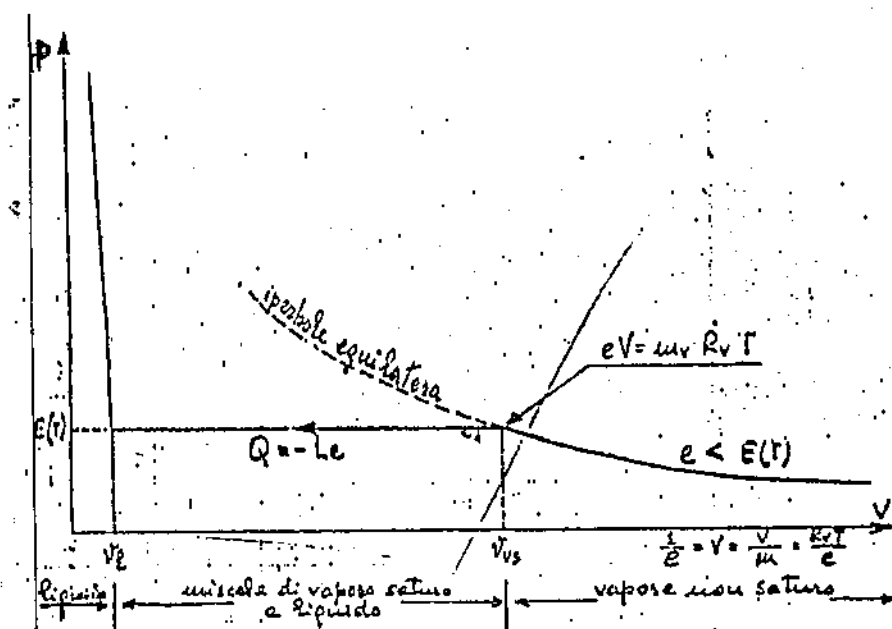
$$(16) \quad \frac{\delta Q}{Q} = \frac{dT}{T}$$

Vediamo ora l'andamento della pressione di vapore saturo con la temperatura (vedi diagramma).

Il vapore d'acqua si comporta come un gas perfetto fino al limite della saturazione, cioè nel tratto di curva dove $\alpha < \epsilon(\tau)$ cioè nel tratto di vapore non saturo, la curva è un'iperbole equilatera e il vapore si comporta quindi con la legge dei

gas perfetti ($eV = m_v R_v T$).

Arrivati al punto di saturazione [$e = E(\tau)$] il volume specifico del vapore saturo (V_{vs}) e la sua pressione $e = E(\tau)$ sono ancora esprimibili mediante l'equazione dei gas perfetti.



Se oltrepassiamo questo punto la pressione rimane costante

$E(\tau) = \text{cost}$; in questo tratto bisogna fornire al sistema la quantità di calore $Q = -Le$ (dove Le è il calore latente di evaporizzazione) cioè bisogna sottrarre il calore, che si libera per la condensazione, al vapore; in tutto questo tratto dove la pressione è costante e la temperatura è costante si è in presenza di una miscela composta da vapore saturo e liquido. Ciò avviene fino a che tutto il vapore è condensato, cioè fino al punto V_l (volume specifico del liquido); essendo il liquido praticamente incompressibile, per avere ulteriori diminuzioni anche piccole di volume sono necessarie pressioni altissime (la curva diventa praticamente verticale).

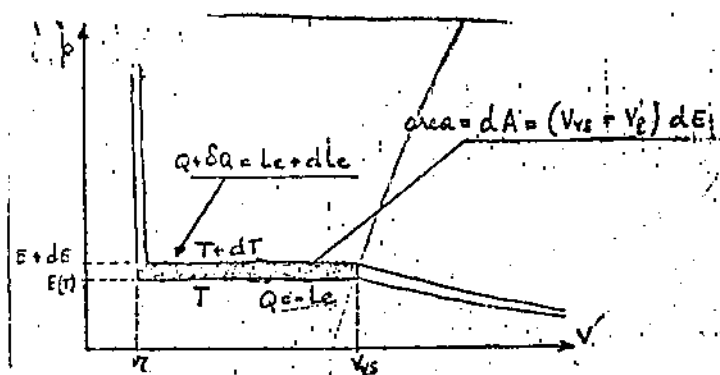
Per avere un'idea dell'ordine di grandezza tra il volume del liquido e quello del vapore facciamo un esempio: calcoliamo il volume specifico del vapor saturo a zero gradi:

$$V_{vs} = \frac{R_v T}{E(r)} = \frac{461 \cdot 273}{610 \left(\frac{N}{m^2} \right)} = \sim \frac{126000}{610} \approx 200 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Quindi un kg di vapore saturo a 0°C ha un volume di 200m^3 pari a 200.000 litri; un kg d'acqua a 0°C ha un volume di un litro; il rapporto tra il volume del vapore e quello dell'acqua è 200.000! Anche se consideriamo il volume a $+10^\circ\text{C}$ la pressione di vapore $E(r)$ raddoppia e il $V_{vs} \approx 100 \text{ m}^3/\text{kg}$.

Pertanto si può sempre trascurare, anche a $+30^\circ\text{C}$ il volume del vapore. Nel diagramma di pag. 1 l'andamento della curva nel tratto del liquido non solo è, come si è già visto praticamente verticale, ma coincide praticamente con l'asse delle ordinate.

Consideriamo ora un ciclo infinitesimo, come in figura relativa al vapore saturo:



Consideriamo due isoterme: quella più in alto a temperatura $T + dT$ ha il volume specifico del vapor saturo un pò più piccolo dell'isoterma T ; il volume specifico del liquido V_l invece è un pò più alto per l'isoterma $T + dT$ di quanto lo è

per l'isoterma T (questa differenza dovuta alla dilatazione dell'acqua per l'aumento di temperatura dT è piccolissimo). Ricordiamo che nel diagramma pV (come in figura) le aree sono proporzionali all'energia poichè l'integrale esteso ad un ciclo $\oint p dV = L$ = lavoro

Il ciclo è il seguente: un chilogrammo di liquido (acqua) alla temperatura $T+dT$; gli si fornisce a questa temperatura il calore $Q+\delta Q=Le^{\delta Le}$ e si ottiene un chilogrammo di vapor saturo alla temperatura $T+dT$; si raffredda di un infinitesimo e si raggiunge la temperatura T ; si sottrae la quantità di calore $Q=-Le$ alla temperatura T ; si scalda il liquido ottenuto di un infinitesimo e si riottiene un kg di liquido alla temperatura $T+dT$. Il ciclo descritto è reversibile; non ha importanza che le variazioni di temperatura siano avvenute adiabaticamente perchè sono infinitesime e possono essere qualsiasi purchè formino angoli finiti con i tratti finiti del ciclo. Il lavoro del ciclo è l'area da racchiusa dal ciclo, è:

$$dA = (V_{vs} - V_e) dE \quad \delta \mathcal{L} = dA = (V_{vs} - V_e) dE$$

dividendo ambo i membri per Le , si ha per la (17):

$$(18) \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{Le} = \frac{(V_{vs} - V_e) dE}{Le} = \frac{dT}{T}$$

dE = variazione della pressione di equilibrio

Trascurando per i motivi visti V_e = volume del liquido si ha:

$$(19) \quad \frac{V_{vs}}{Le} dE = \frac{1}{T} dT$$

Questa è l'equazione di Clapeyron sui cambiamenti di stato

Facendo una seconda approssimazione, esprimendo cioè il volume specifico del vapor saturo con l'equazione caratteri-

ca dei gas perfetti si ha:

-equazione dei gas perfetti per vapore $e V_v = u_v R_v T$

-equazione gas perfetti per vapore saturo $E(T) V_v = u_v R_v T$

dividendo i due membri per u_v si ha $E(T) \frac{V_v}{u_v} = R_v T$

-essendo $V_{vs} = \frac{V_v}{u_v}$ si ha

$$V_{vs} = \frac{R_v T}{E(T)}$$

e, sostituendo nell'equazione di Clapeyron si ha:

$$\frac{R_v T}{E(T) l_e} dE \simeq \frac{1}{T} dT$$

da cui:

$$(20) \quad \frac{dE}{E} \simeq \frac{l_e}{R_v T^2} dT$$

Equazione di Clapeyron

Ponendo $k_t = \frac{l_e}{R_v T^2}$ si ha

$$\frac{dE}{E} = k_t dT$$

che possiamo integrare solo supponendo $k_t = \text{cost}$ (il che vuol dire $T^2 = \text{cost}$) e si ottiene:

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{E} = k_t \int_{T_0}^T dT$$

cioè

$$\ln \frac{E}{E_0} = k_t (T - T_0)$$

da cui

$$(21) \quad E \simeq E_0 e^{k_t (T - T_0)}$$

L'equazione di Clapeyron (20) è una relazione approssimata che dà la variazione della pressione del vapor saturo in funzione della variazione di temperatura. Per le condizioni in cui si trova il vapore nell'atmosfera le approssimazioni fatte sono soddisfacenti.

La relazione (21) può essere ottenuta anche per altre vie meno elementari, in modo formalmente più soddisfacente, oltre che per via sperimentale (Magnus).

II. LEZIONE

Termodinamica della miscela aria-vapor d'acqua,
cioè termodinamica dell'atmosfera.

Il primo principio della termodinamica (conservazione dell'energia) dice:

$$\delta Q = dU + \delta L$$

dove Q = calore scambiato con l'esterno; L = lavoro compiuto sull'esterno; U = energia interna del sistema; d indica che si tratta di un differenziale esatto; δ indica che non si tratta di un differenziale esatto (δQ e δL dipendono dal tipo di trasformazione).

Per un sistema particellare (quale è l'atmosfera):

$$U = N \bar{\epsilon} + N \bar{E}$$

dove N = numero delle molecole; $\bar{\epsilon}$ = energia cinetica media;

$\bar{E}$ = energia potenziale media. Quindi U (energia interna) è la somma dell'energia interna delle singole molecole, dipende dai legami molecolari, è funzione della distanza fra le molecole. Quando dallo stato liquido si passa a quello aeriforme, le distanze tra le molecole diventano grandi, il termine $\bar{E}$ è trascurabile, l'energia interna è quindi solo cinetica, quindi funzione solo della temperatura: in pratica l'aria è tale da essere assimilabile ad un gas perfetto per cui: $dU = m c_v dT$ cioè $U = U_0 + m c_v dT$. Sostituendo, se la trasformazione è reversibile si ha:

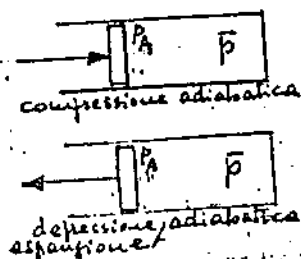
$$\delta Q \stackrel{rev}{=} m c_v dT + p dV$$

essendo $\delta L = p dV$.

Ma in generale è $\delta L \neq p dV$; sarà cioè $\delta L = p_* dV$ il lavoro compiuto dal gas per una variazione di volume dV non corrisponde in generale al prodotto $p dV$ poiché la pressione la pressione interna del gas p , non coincide momento per mo-

mento alla pressione esterna dell'ambiente p_A . Tale coincidenza
 ei ha per trasformazioni reversibili, come si vede dalla (1).

Consideriamo il lavoro di uno stantuffo ideale adiabatico:



nel caso di compressione la pressione vicino allo stantuffo sarà maggiore della pressione media nell'interno $p_A > \bar{p}$; nel secondo caso, espansione adiabatica, la pressione vicino allo stantuffo sarà minore che all'interno $p_A < \bar{p}$.

$$\Delta L = p_A \Delta V < \bar{p} \Delta V$$

Nell'espressione del I principio sopra data compare il volume V . Questo parametro in meteorologia non ha significato pratico per cui si cerca un'espressione analitica del I principio in cui non compaia il volume. Riprendiamo l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$(1) \quad pV = \mu R^* T = m R_A T$$

differenziando si ha:

$$(2) \quad p dV + V dp = \mu R_A dT$$

$$(3) \quad p dV = \mu R_A dT - V dp$$

dalla (1) si ha $V = \frac{\mu R_A T}{p}$ e sostituendo nella (3) si ha:

$$(4) \quad p dV = \mu R_A dT - \frac{\mu R_A T}{p} dp$$

Riprendiamo la (1) di pag. precedente $\delta Q \stackrel{rev}{=} \mu C_v dT + p dV$ e sostituiamo in questa il valore $p dV$ dato dalla (4); si ha:

$$(5) \quad \delta Q \stackrel{rev}{=} \mu C_v dT + \mu R_A dT - \frac{\mu R_A T}{p} dp$$

se facciamo una trasformazione a $p = \text{cost}$ (reversibile) si ha:

$$(6) \quad \delta Q \stackrel{rev}{=} \mu C_p dT = \mu C_v dT + \mu R_A dT$$

dove $C_p = \left(\frac{\delta Q}{\mu dT} \right)_{p=\text{cost}}$; $R_A = C_p - C_v$. Nella (6) sostituiamo quest'ultimo valore $R_A = C_p - C_v$; si ha:

$$(7) \quad \delta Q \stackrel{rev}{=} \mu C_v dT + \mu (C_p - C_v) dT - \mu (C_p - C_v) T \frac{dp}{p}$$

e semplificando:

$$(8) \quad \delta Q \stackrel{rev}{=} \mu \left[C_p dT - (C_p - C_v) T \frac{dp}{p} \right]$$

Quest'ultima è l'espressione del 1° principio della termodinamica per la meteorologia poiché in essa compaiono solo quantità direttamente misurabili o note:

T = temperatura (misurabile)

p = pressione (misurabile)

C_v = calore specifico a volume costante (noto)

C_p = calore specifico a pressione costante (noto).

Esaminiamo ora le trasformazioni adiabatiche (reversibili) cioè quelle per cui $\delta Q = 0$; la (8) diventa, ricordando che per una adiabatica è $\delta L = -dU$ e per un gas perfetto $\delta L = -m C_v dT$

$$C_p dT = (C_p - C_v) T \frac{dp}{p}$$

dividendo per C_p si ha:

$$dT = \frac{C_p - C_v}{C_p} T \frac{dp}{p}$$

e ponendo

$$\bar{K} = \frac{C_p - C_v}{C_p}$$

si ha:

$$\frac{dT}{T} = \bar{K} \frac{dp}{p} \quad (*)$$

per l'aria secca

$$C_p \approx 1000$$

$$C_p - C_v = R = 287 \frac{\text{Joule}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$$

Dall' (*) segue:

$$\Delta T \approx 0,286 \frac{\bar{T}}{p} \Delta p$$

(usiamo i valori iniziali e non quelli medi che non conosciamo).

Esempio: $T = 300^\circ\text{K} = 27^\circ\text{C}$ (temperatura ambiente)

$p = 1000 \text{ mb}$ = livello del mare

$\Delta p = 100 \text{ mb}$ (da 1000 a 900 mb $\hat{=}$ 1Km di quota)

si ha

$$\Delta T = -0,286 \frac{300}{1000} 100 \approx -9^\circ\text{C}$$

introducendo i valori medi

$$p_{\text{medio}} = 950 \text{ mb} \text{ e } T_{\text{medio}} = 296^\circ\text{K}$$

si ha $\Delta T = 0,286 \frac{296}{950} 100 = 8,8^\circ\text{C}$

Riprendiamo la (*) dalla pagina precedente:

$$\frac{dT}{T} = \bar{K} \frac{dp}{p}$$

Integrando tra una temperatura iniziale T_0 e una pressione iniziale p_0 e i valori generici di T e p si ha:

$$\ln \frac{T}{T_0} = \bar{k} \ln \frac{p}{p_0}$$

cioè

$$(1) \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\bar{k}} \quad \text{legge di Poisson}$$

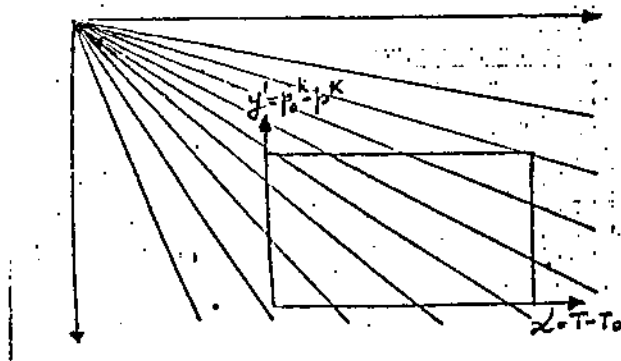
In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali dove $x=T$ e $y = +p^{\bar{k}}$ la (1) diventa:

$$x = x_0 \frac{y}{y_0} \quad \text{oppure} \quad y = \frac{y_0}{x_0} x$$

si ha cioè una retta che passa per l'origine e la cui inclinazione dipende dai valori iniziali x_0 e y_0 (cioè T_0 e p_0)



Capovolgendo il diagramma (ponendo come valori iniziali $x' = T - T_0$ e $y' = p^k - p_0^k$) si ha il diagramma di Stüve o diagramma adiabatico. Si dice adiabatico perché le trasformazioni adiabatiche sono rette.



per l'isoterma T (questa differenza dovuta alla dilatazione dell'acqua per l'aumento di temperatura dT è piccolissimo). Ricordiamo che nel diagramma pV (come in figura) le aree sono proporzionali all'energia poichè l'integrale esteso ad un ciclo $\oint p dV = L$ = lavoro

Il ciclo è il seguente: un chilogrammo di liquido (acqua) alla temperatura $T+dT$; gli si fornisce a questa temperatura il calore $Q+\delta Q = Le^{dT}$ e si ottiene un chilogrammo di vapor saturo alla temperatura $T+dT$; si raffredda di un infinitesimo e si raggiunge la temperatura T ; si sottrae la quantità di calore $Q = -Le$ alla temperatura T ; si scalda il liquido ottenuto di un infinitesimo e si riottiene un kg di liquido alla temperatura $T+dT$. Il ciclo descritto è reversibile; non ha importanza che le variazioni di temperatura siano avvsnute adiabatiche perchè sono infinitesime e possono essere qualsiasi purchè formino angoli finiti con i tratti finiti del ciclo. Il lavoro del ciclo è l'area da racchiusa dal ciclo, è:

$$dA = (V_{vs} - V_e) dE \quad \delta \mathcal{L} = dA = (V_{vs} - V_e) dE$$

dividendo ambo i membri per Le , si ha per la (17):

$$(18) \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{Le} = \frac{(V_{vs} - V_e) dE}{Le} = \frac{dT}{T}$$

dE = variazione della pressione di equilibrio

Trascurando per i motivi visti V_e = volume del liquido si ha:

$$(19) \quad \frac{V_{vs}}{Le} dE = \frac{1}{T} dT$$

Questa è l'equazione di Clapeyron sui cambiamenti di stato

Facendo una seconda approssimazione, esprimendo cioè il volume specifico del vapor saturo con l'equazione caratteri-

è la temperatura che assumerebbe una massa di aria umida se tutto il vapore condensasse in un processo a pressione costante e il calore latente di condensazione servisse solo per scaldare aria secca.

Notiamo che le considerazioni fatte riguardavano una evaporazione, nella definizione di temperatura equivalente interviene un processo ideale, di condensazione; per questo motivo la variazione di temperatura nel primo caso era negativa, nel secondo è positiva.. Si ha pertanto:

$$T_e = T + dT_e = T + 2,5 \theta$$

Notiamo ancora che si tratta di una temperatura puramente ideale in quanto il processo per ottenerla è fisicamente impossibile; infatti a pressione costante facendo condensare il vapore, la massa d'aria si riscalda, per cui si allontana dal punto di saturazione e il processo anche se iniziato si ferma.

Temperatura di bulbo bagnato (T_w)

E' praticamente la temperatura del termometro con il bulbo bagnato dello psicrometro. E' la temperatura più bassa alla quale può essere raffreddata l'aria, facendo evaporare in essa dell'acqua fonita dall'esterno, a pressione costante.

Consideriamo il processo che avviene sul "bulbo bagnato" dello psicrometro durante la ventilazione: arriva aria con temperatura T e umidità specifica Q'_w ; sarà:

$$(*) \quad q' = D \frac{e}{p} \quad Q'_w = D \frac{E(T_w)}{p}$$

il calore sottratto al bulbo per evaporazione di $(Q'_w - q')$ grammi di acqua per Kg. di aria alla temperatura T_w sarà:

$$\delta Q_e = (Q'_w - q') m t_e$$

dove m è la massa d'aria interessata. Il calore somministrato al bulbo dall'aria è:

$$\delta Q_p = m c_p (T - T_w)$$

Siccome la temperatura di bulbo bagnato T_w viene letta in condizioni di equilibrio si ha: $\delta Q_e + \delta Q_p = 0$. Quindi:

$$m c_p (T - T_w) = l_e m (q'_w - q')$$

Sostituendo in questa relazione i valori dati dalla (*) si ha:

$$c_p (T - T_w) = \frac{l_e D' (E_w - e)}{p}$$

da cui:

$$e = E_w - \frac{0,624}{\frac{l_e}{600}} \frac{10^3}{p} (T - T_w) \quad \text{in mb}$$

da cui ancora ponendo la costante $K = \frac{0,24 \cdot 10^3}{600 \cdot 0,622}$ detta costante dello psicrometro si ha:

$$e = E_w - K (T - T_w)$$

formula dello
psicrometro

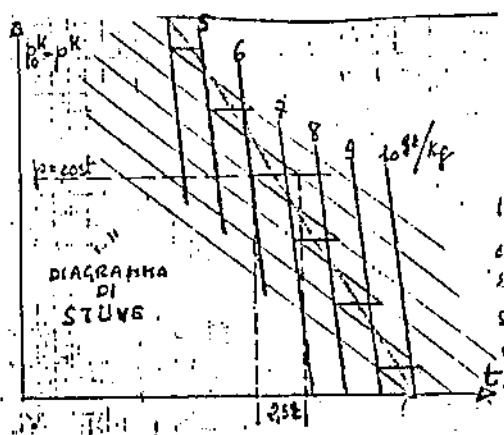
Nota: nella (*) di pagina precedente abbiamo usato $q' = D \frac{e}{p}$ che è un'espressione approssimata dell'umidità specifica, la cui espressione esatta sarebbe: $q' = D \frac{2}{p - (1-D)e}$. In ogni caso, con l'uso dell'umidità specifica $q = \frac{m_v}{m_a + m_v}$ si ottiene in termini rigorosi la pseudo temperatura di bulbo bagnato, che d'altronde è quella ricavabile sui diagrammi termodinamici per via grafica e che differisce di poco dalla vera "temperatura di bulbo bagnato" la quale si ottiene con la stessa trattazione introducendo al posto dell'umidità specifica i rapporti di mescolanza, $X = \frac{m_v}{m_a} = D \frac{e}{p - e}$.

Trasformazioni adiabatiche di aria satura, calcolo approssimato; umidificazione adiabatica e a pressione costante di aria per evaporazione.

Si è visto che per trasformazioni adiabatiche e reversibili si ha la legge di Poisson:

$$dT = k \frac{T}{P} dp$$

valida per aria secca. Nel caso che l'aria fosse satura ad un



raffreddamento corrisponde una condensazione; si libera un certo calore latente di condensazione che tende a riscaldare la massa di aria secca. Vediamo come si possa arrivare ad un'espressione analitica (e a una costruzione grafica) simile a quella so-

prescritta per aria secca nel caso di aria satura.

La variazione di temperatura nel caso di una trasformazione adiabatica satura la possiamo considerare come somma di due variazioni di temperatura: una come se l'aria fosse secca, cioè adiabatica secca e una dovuta alla condensazione a pressione costante, cioè:

$$(*) \quad dT_{as} = dT_a + dT_p = k \frac{T}{P} dp - \frac{L_e}{C_p} dQ$$

dove il primo termine deriva dalle leggi di Poisson e il secondo dalla definizione di temperatura equivalente. Nella relazione scritta dQ è la quantità di acqua che condensa a pressione costante, ma in effetti è una variazione dovuta alla variazione di pressione e di temperatura; infatti Q .

dipende dalla temperatura T e dalla pressione p secondo la seguente relazione:

$$Q' = \frac{u_{vs}}{u} = \Delta \frac{E(T)}{p} \quad (\text{per vapore saturo})$$

da cui:

$$\frac{dQ'}{Q'} = \frac{dE}{E} - \frac{dp}{p}$$

da cui ancora:

$$dQ' = Q' \left(\frac{dE}{E} - \frac{dp}{p} \right)$$

e sostituendo questo valore nella (*) si ha:

$$dT_{as} = k \frac{T}{p} dp - \frac{L_e}{C_p} Q' \left(\frac{dE}{E} - \frac{dp}{p} \right)$$

per l'equazione di Clapeyron si ha: $\frac{dE}{E} = \frac{L_e}{R_v T^2} dT_{as}$ e sostituendo ancora si ha:

$$dT_{as} = k \frac{T}{p} dp - \frac{L_e}{C_p} Q' \left(\frac{L_e}{R_v T^2} dT_{as} - \frac{dp}{p} \right)$$

e risolvendo e semplificando si ha:

$$dT_{as} = \frac{kT + \frac{L_e}{C_p} Q'}{1 + \frac{L_e^2 Q'}{C_p R_v T^2}} \cdot \frac{dp}{p}$$

adiabatica satura

confrontandola con l'equazione di Poisson:

$$dT_a = k \cdot T \frac{dp}{p}$$

si vede che sono simili e la prima tende alla seconda quando il contenuto di vapore tende a zero ($Q' \rightarrow 0$). Si vede pure che

dT_{as} tende a dT_a , cioè l'adiabatica satura che è quasi verticale alle alte temperature e alle alte pressioni, si incurva verso sinistra tendendo asintoticamente alle adiabatichhe secche quando la temperatura T tende a zero.

IV. LEZIONE

Adiabatiche reversibili per aria satura come isentro-
piche. Concetti introduttivi. Formula finale esatta.

Si ricordi che la definizione esatta dell'Entropia è

$$dS \stackrel{\text{reversibile}}{=} \frac{\delta Q}{T}$$

in cui il segno dell'eguaglianza vale per trasformazioni re-
versibili e quello che rende maggiore dS vale per trasforma-
zioni irreversibili.

Questa funzione esprime in forma analitica e quantita-
tiva il secondo principio della termodinamica.

L'Entropia gode della fondamentale proprietà dell'ad-
ditività. Se l'entropia di un sistema termodinamico "a" è S_a
e l'entropia di un altro sistema termodinamico "b" è S_b l'entro-
pia del sistema costituito dall'insieme dei due sistemi è ugu-
ale alla somma delle entropie $S = S_a + S_b$.

Questa proprietà è applicabile allo studio di un siste-
ma termodinamico formato da aria secca + vapore + acqua liqui-
da. Attribuiamo a ciascun termine del sistema l'entropia che
gli è propria e valutiamo la variazione globale di entropia
che compete al sistema stesso.

Detta S l'entropia di un sistema, dicasi entropia spe-
cifica e si indica con $s = (S / m)$ l'entropia riferita all'uni-
tà di massa del sistema.

Sia m una massa d'aria satura isolata, nel senso che
sia costante la somma $m = m_a + m_{vs} + m_l = \text{cost}$ della massa
d'aria secca m_a , della massa del vapore saturo m_{vs} e della
massa della fase liquida m_l , che la costituiscono; si può
intanto porre:

$$(m/m_a) = 1 + (m_{vs}/m_a) + (m_l/m_a) = \text{cost}$$

Oppure ponendo $(m_{vs}/m_a) = X =$ rapporto di mescolanza del vapore saturo, e $(m_l/m_a) = L =$ rapporto di mescolanza dell'acqua liquida, si ha $(m/m_a) = 1 + X + L$ e ponendo $X + L =$ acqua totale a si ha $(m/m_a) = 1 + X + L = 1 + a$.

Se il sistema è termodinamicamente isolato, cioè non ha scambi di calore con l'esterno, e tutti gli scambi relativi ad espansioni o compressioni dell'aria, nonché i cambiamenti di stato dell'acqua nelle due fasi, liquida e vapore si suppongono tali da essere interni alla massa d'aria umida considerata si può scrivere:

$$\int Q = 0 \quad \text{cioè} \quad dS \sum_{rev} 0$$

per ogni trasformazione reversibile o irreversibile che riguardi il sistema nel suo complesso.

In natura le trasformazioni sono sempre irreversibili, ma è sempre possibile pensare un'esperienza ideale del tutto analoga al processo naturale, ma costituita da una successione di stati di equilibrio: in questo modo è possibile trovare relazioni tra i parametri di stato che regolano le trasformazioni termodinamiche, ed attribuire in un secondo tempo, con le dovute cautele i risultati trovati al processo naturale.

Nel caso presente si fa l'ipotesi che la massa d'aria umida subisca una trasformazione reversibile si può scrivere che dette S_1 ed S_2 le entropie relative allo stato iniziale e finale del sistema nel suo complesso deve essere $S_1 = S_2$.

Ricordando la proprietà additiva dell'entropia, è possibile trovare la relazione tra parametri di stato scrivendo, sommando ed eguagliando le entropie finali ed iniziali delle tre fasi del sistema complessivo: aria secca-vapore-acqua liquida.

Dal 1° principio della termodinamica, tramite l'equa-

zione dei gas perfetti, per l'aria secca si ha:

$$dS_A \underset{\text{rev}}{=} \frac{\int Q_A}{T} = m_A \cdot (c_{p_A} \cdot (dT/T) - (c_p - c_v)_A \cdot (dp_A/p_A))$$

Poiché dS è un differenziale esatto (dipende soltanto dallo stato iniziale e finale) si ha:

$$S_A = m_A \cdot (c_{p_A} \cdot \ln T - (c_p - c_v)_A \cdot \ln p_A) + \text{cost}$$

e passando all'entropia specifica:

$$s_A = (S_A / m_A) = c_{p_A} \cdot \ln T - (c_p - c_v)_A \cdot \ln p_A + \text{cost'}$$

Per l'acqua liquida una variazione elementare del contenuto di calore sarà $\int Q_l = m_l \cdot c_l \cdot dT$ da cui:

$$dS_l = \frac{\int Q_l}{T} = m_l \cdot c_l \cdot dT$$

segue:

$$S_l = m_l \cdot c_l \cdot \ln T + \text{cost'}$$

e passando all'entropia specifica:

$$s_l = S_l / m_l = c_l \cdot \ln T + \text{cost'}$$

Infine per l'acqua in fase di vapore saturo, che ha subito un cambiamento di stato per diventare vapore si ha:

$$S_{vs} = m_{vs} \cdot s_l + \Delta S_{\text{evap}}$$

basta pensare di andare con una trasformazione reversibile dal vapor saturo ad acqua liquida

$$\begin{aligned} s_{vs} &= s_l + (\Delta s_e / m_{vs}) = \\ &= s_l + (L_e / T) \quad (*) \end{aligned}$$

la variazione di entropia dovuta all'evaporazione ΔS_{evap} è

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{evap}} &= Q_e / T = (L_e m_{vs}) / T = (L_e / T) m_{vs} \\ \text{da cui } \Delta S_e / m_{vs} &= L_e / T \quad \text{da cui segue la } (*) \end{aligned}$$

Sommando e riferendosi all'unità di massa di aria secca ($m_a=1$)

$$\text{si ha: } S = s_a + L \cdot s_l + X \cdot \underbrace{s_{vs}}_{s_l + \Delta s_e} + \text{cost}$$

cioè: $S = s_A + L \cdot s_l + X \cdot s_l + X \cdot \Delta s_e + \text{cost}$

$$S = s_A + s_l \cdot (L + X) + X \cdot \Delta s_e + \text{cost}$$

dove $L + X = a = \text{tutta l'acqua} = \text{cost}$;

$$s_A + s_l \cdot a + X \cdot \Delta s_e = s_{A1} + s_{l1} \cdot a + X_1 \cdot \Delta s_{e1}$$

Sostituendo a ciascun termine la sua espressione in funzione dei parametri di stato precedentemente ricavata e indicando con l'indice 1 lo stato finale, si ha:

$$\begin{aligned} & (c_{p_A} \cdot \ln T - (c_p - c_v)_A \cdot \ln p_A) + a \cdot c_l \cdot \ln T + X \cdot (L_e/T) = \\ & = \underbrace{(c_{p_A} \cdot \ln T - (c_p - c_v)_A \cdot \ln p_A)}_{s_A - s_{A1}} + a \cdot c_l \cdot \ln T + X \cdot (L_e/T) \\ & = (c_{p_A} \cdot \ln T - (c_p - c_v)_A \cdot \ln p_{A1}) + a \cdot c_l \cdot \ln T_1 + X_1 \cdot (L_e/T_1) \end{aligned}$$

da cui :

$$\begin{aligned} \ln (T/T_1) = & ((c_p - c_v)_A / (c_{p_A} + a \cdot c_l)) \cdot \ln (p_A/p_{A1}) + \\ & + (1 / (c_{p_A} + a \cdot c_l)) \cdot (X_1 \cdot (L_{e1}/T_1) - X \cdot (L_e/T)) \end{aligned}$$

che è l'espressione cercata dell'adiabatica satura.

Confrontandola con l'espressione dell'adiabatica secca:

$$\ln (T/T_1) = ((c_p - c_v) / c_p) \cdot \ln (p/p_1) \quad (\text{Poisson})$$

appare subito evidente la differenza che la presenza del vapore d'acqua saturo comporta.

Ma il risultato trovato è interessante anche come esempio di metodo, giacché con l'ipotesi di gas perfetto e di massa totale costante è stato possibile dedurre attraverso la funzione di stato entropia un risultato del tutto generale che lega i parametri di stato in ogni processo in cui si può immaginare che il contenuto di calore di una massa di aria umida non subisca variazioni apprezzabili per interazione con l'ambiente, pur permettendo alla massa d'aria in questione un'evoluzione anche importante in relazione alla sua densità, al suo contenuto di vapore, ed alla sua temperatura.

V. LEZIONE

Semplificazione della relazione dell'adiabatica satura reversibile - $\vartheta - \vartheta_p$ - Significato sintetico di ϑ e ϑ_p - Linee di flusso per aria secca o con fenomeni di condensazione.

Riprendiamo l'espressione dell'adiabatica satura; facciamo

Ricordiamo il significato dei simboli:

T_1 = temperatura iniziale

T = temperatura finale

p_{s1} = pressione dell'aria secca iniziale

p_{sf} = pressione dell'aria secca finale

X contenuto di vapore alla temperatura T

X_1 = contenuto di vapore alla temperatura T_1

L_e = calore latente di evaporazione alla temperatura T

L_{e1} = calore latente di evaporazione alla temperatura T_1

a = rapporto di mescolanza acqua/aria

c_e = calore specifico dell'acqua liquida

$c_{pa} = 0,24 \text{ cal/gr } ^\circ\text{C}$

delle esemplificazioni: supponiamo che la pressione parziale dell'aria secca p_a e la pressione totale p siano uguali; infatti a temperature ordinarie la pressione di saturazione del vapore d'acqua è intorno ai 20 mb e la pressione totale 1000 mb per cui la semplificazione appare plausibile. Inoltre se facciamo l'ipotesi che almeno inizialmente non c'è liquido presente (acqua solo sotto forma di vapore) si ha $a \cdot c_e = 0,1 = a = X$ e poichè alla temperatura di $\sim 40^\circ\text{C}$ $X = 4 \cdot 10^{-2}$ Kg vapore/Kg aria e alla temperatura di $\sim 0^\circ\text{C}$ $X = 3 \cdot 10^{-3}$ Kg vapore/Kg aria ($\times$), si vede che questi valori sono del tutto trascurabili rispetto al valore di $c_{pa} = 0,24$ per cui possiamo trascu-

rare il termine a_{C_i} . Si ottiene:

$$(1) \quad \ln \frac{T}{T_1} = \left(\frac{C_p - C_v}{C_p} \right)_A \ln \frac{P}{P_1} + \frac{1}{C_{pA}} \left(X_1 \frac{L_{e1}}{T_1} - X \frac{L_e}{T} \right)$$

Nota (*): notiamo che X decresce esponenzialmente con la temperatura e si dimezza ogni circa 10°C .

La prima semplificazione si può esprimere simbolicamente così:

$$X = D \frac{E(r)}{p - E(r)} \approx D \frac{E}{p} \quad (\text{trascurando } E(r) \text{ al denominatore})$$

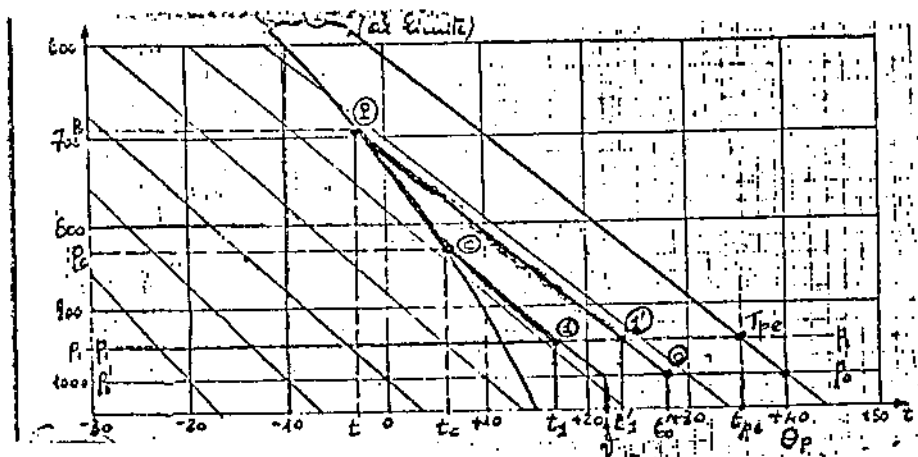
poiché:
$$X = \frac{u_V}{u_A} = - \frac{\frac{eV}{R_V T}}{\frac{p_A V}{p_A T}} = - \frac{R_A}{R_V} \frac{e}{p_A} = \Delta \frac{e}{p_A} = \Delta \frac{E(V)}{p - E(V)} \approx \Delta \frac{E}{p}$$

L'equazione dell'adiabatica satura semplificata (1) di pagina precedente si può esprimere, insieme all'espressione dell'adiabatica secca:

adiabatica secca $T = T_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^k$ dove $k = \frac{C_p - C_v}{C_v} = 0,286$

adiabatica satura
semplificata

$$T = T_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^k e^{\frac{1}{C_p} \left(X_1 \frac{L_{e1}}{T_1} - X \frac{L_e}{T} \right)}$$



Consideriamo una particella d'aria con condizioni iniziali (χ_1, p_1, t_1) e supponiamo che essa conservi la sua individualità negli spostamenti cioè non si mescoli o disperda nell'ambiente circostante; facciamo compiere a questa particella un'espansione adiabatica; essa si porterà dal punto 1 al punto C del grafico precedente seguendo un'adiabatica secca; nel punto C infatti supponiamo che la particella diventi satura, sia cioè $\chi_1 = X_1$; le sue condizioni saranno (X_1, p_c, t_c) dove t_c è la temperatura cui comincia la condensazione e p_c la pressione corrispondente. Continuiamo l'espansione e la particella seguirà un'adiabatica satura con la condizione che l'acqua via via condensata venga eliminata (supponiamo che precipiti); questa trasformazione che è ovviamente irreversibile (l'espansione adiabatica secca è invece reversibile), nella quale si presuppone che l'acqua condensata precipiti, prende il nome di pseudoadiabatica; in una posizione generica di questo tratto di trasformazione la particella avrà condizioni generiche (X, p, t) ; se da questo punto facciamo compiere alla particella una compressione, che non può non essere che adiabatica secca, fino alla pressione iniziale p_1 avremo una temperatura t'_1 che sarà evidentemente maggiore di t_1 e se continuiamo la compressione fino alla pressione di riferimento p_0 (che in figura è 1000 mb) otterremo la temperatura t'_0 .

Il processo da (1) a (C) è dato da: $T_c = T_1 \left(\frac{p_c}{p_1} \right)^{\bar{k}}$.

Il processo da (C) a (P) è: $T = t_c \left(\frac{p}{p_c} \right)^{\bar{k}} e^{\frac{1}{\bar{\phi}} \left(\chi_1 \frac{L_c}{T_c} - X \frac{L_c}{T} \right)}$

Il processo da (P) a (1) è $T'_1 = T \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\bar{k}} = \left[T_1 \left(\frac{p_c}{p_1} \right)^{\bar{k}} \left(\frac{p}{p_c} \right)^{\bar{k}} e^{\frac{1}{\bar{\phi}} \left(\chi_1 \frac{L_c}{T_c} - X \frac{L_c}{T} \right)} \right]^{\bar{k}}$

Il processo da (P) a (0) è: $T'_0 = T'_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\bar{k}} = \left[T_1 \left(\frac{p_c}{p_1} \right)^{\bar{k}} \left(\frac{p}{p_c} \right)^{\bar{k}} e^{\frac{1}{\bar{\phi}} \left(\chi_1 \frac{L_c}{T_c} - X \frac{L_c}{T} \right)} \right]^{\bar{k}}$

Al limite, cioè quando la posizione generica P della particella è portata al limite (pressione nulla o temperatura nulla), T_1' tende a T_{pe} e T_0' tende a ϑ_{pp} . Dalle relazioni sopra scritte, trascurando nell'esponentiale $\times \frac{L_e}{T}$ che tende a zero poiché X va a zero più rapidamente di T si ha:

$$T_{pe} = T_1 e^{\frac{1}{c_p} \chi_1 \frac{L_e}{T_c}}$$

temperatura pseudo
equivalente.

$$\vartheta_{pp} = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} e^{\frac{1}{c_p} \chi_1 \frac{L_e}{T_c}}$$

temperatura pseudo
potenziale.

Questi valori di temperatura così trovati prendono il nome di temperatura pseudo equivalente (T_{pe}) e temperatura pseudo potenziale (ϑ_{pp}); essi dipendono solo dalle condizioni della massa d'aria.

Riprendiamo in considerazione la temperatura equivalente:

$$T_e = T + \frac{L_e}{q_0} q' = T + \frac{1000}{0,24} q' \approx T + 2,5 q$$

E' quella temperatura che assumerebbe una massa d'aria se tutto il vapore contenuto condensasse a pressione costante.

Nota: $q'_1 = D \frac{e}{p - (1-0)e} = D \frac{e}{p - 0,375 \cdot e}$

$$\chi = D \frac{e}{p - e}$$

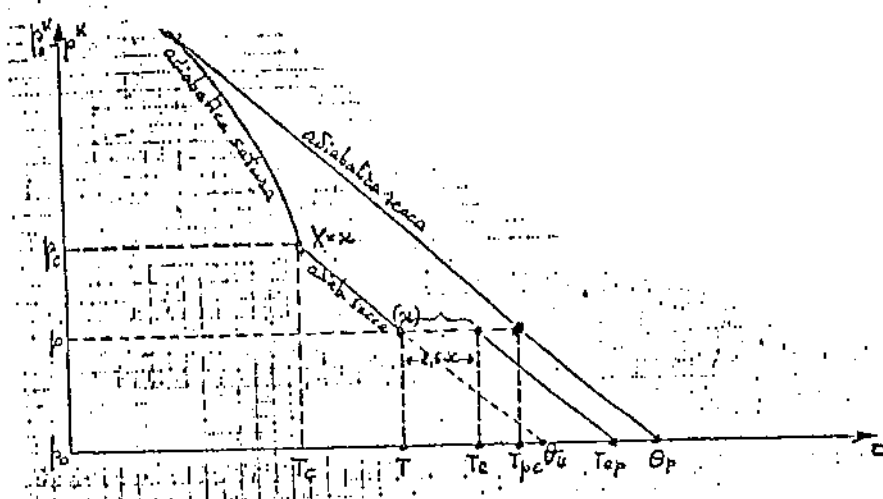
da cui si vede che in prima approssimazione $q' \approx \chi$

Definiamo ora la temperatura potenziale:

$$\vartheta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}}$$

p_0 è la pressione di riferimento; è la temperatura che assu-

è la temperatura che assumerebbe una massa d'aria portando con un processo adiabatico secco la sua temperatura equivalente alla pressione di riferimento $p_0 = 1000$ mb.



T = temperatura iniziale della particella (t, p, x)

T_e = temperatura alla quale comincia la condensazione;

p_e = pressione corrispondente a T_e

x = contenuto di vapore iniziale

X = uguale contenuto di vapore saturo

$$T_e = T + 2.5 \cdot x \quad \text{temperatura equivalente} = T + \frac{L_e}{q_0} q' \approx T + \frac{L_e}{q_0} x$$

$$T_{pe} = \text{temperatura pseudo equivalente} = T_e$$

$$\theta_e = T_{ep} = \text{temperatura equivalente potenziale} = T_e \left(\frac{p_0}{p_e} \right)^k$$

$$\theta_p = \text{temperatura pseudo potenziale} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k e^{\frac{1}{c_p} x \frac{L_e}{T_e}}$$

$$\theta = \text{temperatura potenziale} = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k$$

Notiamo che la temperatura pseudo potenziale si può scri-

vere:

$$\theta_p = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k e^{\frac{1}{c_p} x \frac{L}{T}} = \theta e^{\frac{1}{c_p} x \frac{L}{T}}$$

da cui si vede che $\theta_p = \theta$ quando l'esponente è nullo il che si

verifica per $X = 0$ cioè per aria secca.

Prendiamo l'espressione della temperatura pseudo equivalente:

$$T_{pe} = T \cdot e^{\frac{1}{C_p} X \frac{L_c}{T_c}}$$

e la sviluppiamo in serie: $\left(e^{ax} = 1 + ax + \frac{1}{2} a^2 x^2 + \frac{1}{3!} a^3 x^3 + \dots \right)$ fermandoci al termine di primo grado:

$$T_{pe} \approx T \cdot \left(1 + \frac{L_c}{C_p} \frac{X}{T_c} \right) = T + \frac{L_c}{C_p} \frac{T}{T_c} X$$

se l'aria non è molto secca, cioè se la condensazione avviene per $T_e \approx T$ si ha: $T/T_e \approx 1$

$$T_{pe} \approx T + \frac{L_c}{C_p} X = T_e$$

Nelle approssimazioni dette (serie fino al primo ordine e aria quasi satura) la temperatura pseudo equivalente è uguale alla temperatura equivalente, ma in effetti T_e è inferiore, anche se di poco, a T_{pe} . Analogamente (vedi diagramma precedente) la temperatura equivalente potenziale può ritenersi uguale (ma in effetti è inferiore) alla temperatura pseudo potenziale:

$$T_{ep} \approx \vartheta_p$$

Fisicamente la temperatura equivalente (T_e) si ottiene cedendo a pressione costante il calore latente di condensazione alla massa d'aria; la temperatura pseudo equivalente fisicamente si ottiene cedendo il calore latente di condensazione alla massa d'aria a pressione variabile, cioè a pressioni decrescenti e poichè il calore latente varia con la temperatura

(esso è 600 Kcal/Kg a 0°C e 540 Kcal/Kg a +40°C), cioè con la quota, il calore totale così ceduto è maggiore di quello ceduto a pressione costante; ovvero il calore latente ceduto per condensazione graduale è maggiore di quello ceduto a pressione costante.

Analogamente valutiamo l'errore che si commette nel ritenere $T_{ep} = \vartheta_p$. L'errore è $\Delta\vartheta = \vartheta_p - T_{ep} = \Delta T$ dove $\Delta T \left(\frac{p_0}{p}\right)^k$. Da questa relazione si deduce che l'errore cercato dipende da $\frac{p_0}{p}$ ed è tanto maggiore quanto minore è p, cioè quanto più si è in quota.

Come applicazione di quanto esposto consideriamo una massa d'aria lungo un percorso con ostacoli orografici:



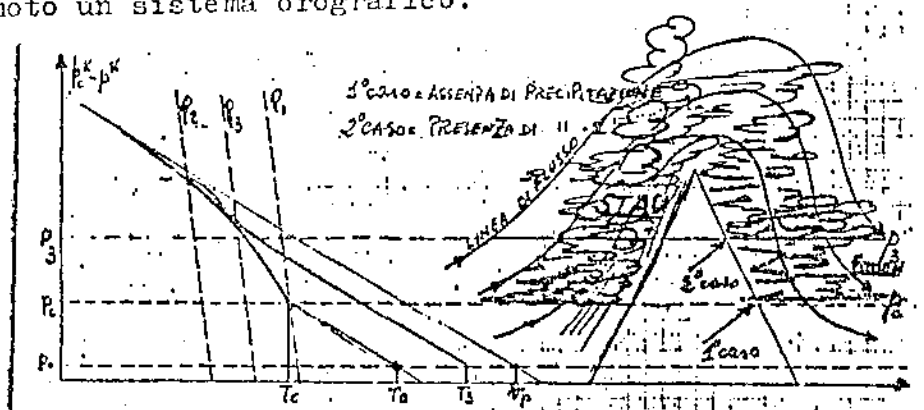
Effettuando sondaggi lungo il percorso della massa d'aria in movimento è possibile seguirla nelle sue vicissitudini, determinandone le linee di flusso. Se nell'attraversamento del sistema orografico la massa segue un processo adiabatico secco (cioè in condizioni di sereno) le linee di flusso coincidono con le linee di egual temperatura potenziale; se viceversa il moto è accompagnato da condensazione di vapore (adiabatico saturo) le linee di flusso coincidono con le linee di egual temperatura pseudoipotenziale. Si vede che in questo modo si possono seguire le masse d'aria anche per varie migliaia di Km.

VI LEZIONE

Applicazione delle adiabatichette d'aria satura e non satura. Fronti e fenomeni orografici. Il cumulo nel modello reversibile: energia di formazione, suo calcolo. Valutazioni pratiche: scale.

In meteorologia quando intervengono grandi masse d'aria i processi termodinamici sono assimilabili sempre a processi adiabatichette, saturi o non saturi.

Consideriamo il caso che una "massa d'aria" incontri nel suo moto un sistema orografico.



La massa d'aria incontrando una catena montuosa (vedi figura) si solleva, raggiunge la sommità, e ricade a valle; parte da condizioni iniziali p_0 , T_0 , q_1 , si solleva secondo un'adiabatichette secca finò a raggiungere la condensazione che avviene a pressione p_c ; a questa quota comincia la formazione delle nubi; successivamente segue un'adiabatichette satura fino al superamento dell'ostacolo orografico; ridiscende indi ripercorrendo la stessa adiabatichette satura, nell'ipotesi che non ci siano state precipitazioni, fino alla pressione p_c , alla quale quota le nubi evaporano e continuando ancora nella discesa segue l'adiabatichette secca fino al livello di riferimento con pressione p_0 dove

avrà riacquisito la temperatura iniziale.

NOTA: si parla di pressione di riferimento p_0 e non di "suolo". in quanto negli strati molto vicini al suolo (circa lo spessore di duecento metri pari a circa 20 mb di pressione) la massa d'aria risente in modo sensibile delle condizioni del suolo stesso (umidità, irraggiamento etc.).

NOTA: da quanto detto si deduce che nel caso che non c'è precipitazione, la base delle nubi a monte e a valle del sistema orografico (cioè sopravvento e sottovento) è allo stesso livello; la massa d'aria in questo caso segue una trasformazione adiabatica (satura e secca) reversibile.

Consideriamo ora il caso in cui ci siano delle precipitazioni: in questo caso il processo non può più essere considerato reversibile.

Le condizioni iniziali (della particella esaminata) siano (p_0, T_0, q_1) . Alla fine della salita, cioè della espansione adiabatica, sia q_2 il contenuto di vapore (non ancora condensato); qui la nube è formata da goccioline ottenute dalla condensazione del vapore $L = q_1 - q_2$; supponiamo che ci sia precipitazione, cioè che una parte di queste goccioline abbandonino la massa; sia x tale parte; (ovviamente $0 < x < L$); durante la discesa il processo sarà adiabatico saturo (cioè reversibile) solo per un tratto, finché evaporano le goccioline non precipitate, cioè nella figura fino alla isoigrometrica q_3 a cui corrisponde la pressione p_3 : questo è il nuovo livello a cui possono giungere le nubi sotto vento. ($q_3 = q_1 - Lx = q_1 - (q_1 - q_2)x$)

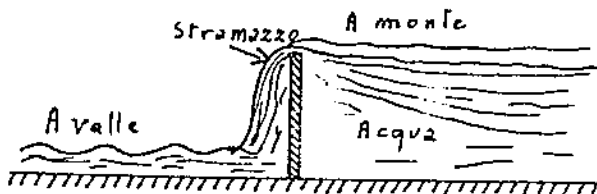
Successivamente la trasformazione (cioè la compressione) sarà adiabatica secca fino al livello di riferimento dove

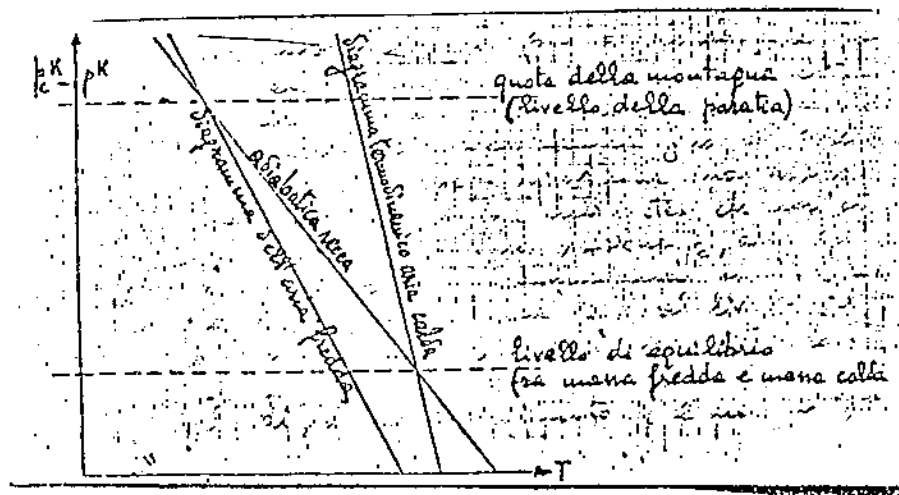
la temperatura non sarà T_0 ma $T_3 = T_0 + 2.5 \cdot x \cdot L$. Quindi nel caso in cui ci sono precipitazioni la base delle nubi sotto vento è più alta che sopravento e alla stessa quota (livello) di riferimento la temperatura dell'aria è più alta e l'umidità specifica (q) più bassa sottovento che non sopravento. Questo fenomeno (nubi più alte, assenza di precipitazioni, tendenza a sereno, aria più calda e relativamente secca) prende il nome di Fohen (dal nome di una valle svizzera dove il fenomeno è imponente), ed è quanto succede sottovento del caso descritto. Il fenomeno contrario al fohen si chiama Stau. Cioè quando a monte della corrente si verifica lo stau (nubi, precipitazioni etc.) a valle si verifica il fohen.

Dalla variazione di temperatura tra sopravento e sottovento si può valutare se e quanto è piovuto in montagna. Per un aumento di 10 gradi si deduce che è piovuto una quantità di acqua di 4 grammi per kg d'aria.

Altro fenomeno a cui può dar luogo una massa d'aria che incontra un sistema orografico è una specie di Fohen, che in idraulica prende il nome di stramazzo, e che si verifica quando dell'aria fredda e secca si accumula lentamente a ridosso dei monti riempiendo gradualmente un bacino fino a tracimare e riversarsi quindi a valle (nell'altro versante) dove stazionava dell'aria calda. Il fenomeno è assimilabile proprio a

uno stramazzo idraulico (vedi figura) in cui una paratia crea un bacino che si riempie di acqua tracimando sulla paratia precipiti a valle dove può trovare altra acqua e forma delle ondulazioni; oppure trova via libera e spazza via tutto.





Supponiamo di conoscere lo stato termodinamico dell'aria fredda a monte e dell'aria calda a valle (con dei sondaggi). Alla sommità della barriera orografica l'aria fredda sarà ovviamente più pesante della calda allo stesso livello; per questo precipiterà a valle seguendo un processo di compressione adiabatico secco e di riscaldamento; questa veloce discesa si arresta quando la temperatura dell'aria fredda eguaglierà quella dell'aria calda preesistente; si ha (vedi figura) un livello di equilibrio; a questo livello la superficie di discontinuità tra le due masse d'aria è generalmente ondulata; (l'ondulazione è dovuta alle oscillazioni della corrente fredda nell'intorno del livello di equilibrio ed è tanto più marcata quanto maggiore è l'energia cinetica della massa fredda che stramazza dalla montagna).

~~Se~~ Se il livello di equilibrio si trova al livello delle nubi medie (circa 3000 metri) si formano altocumuli tipici a "rotoli" in corrispondenza delle ondulazioni.

~~Se~~ Se il livello di equilibrio si trova alla quota delle nubi basse (circa 1500 metri) si formano analoghi stratocumuli.

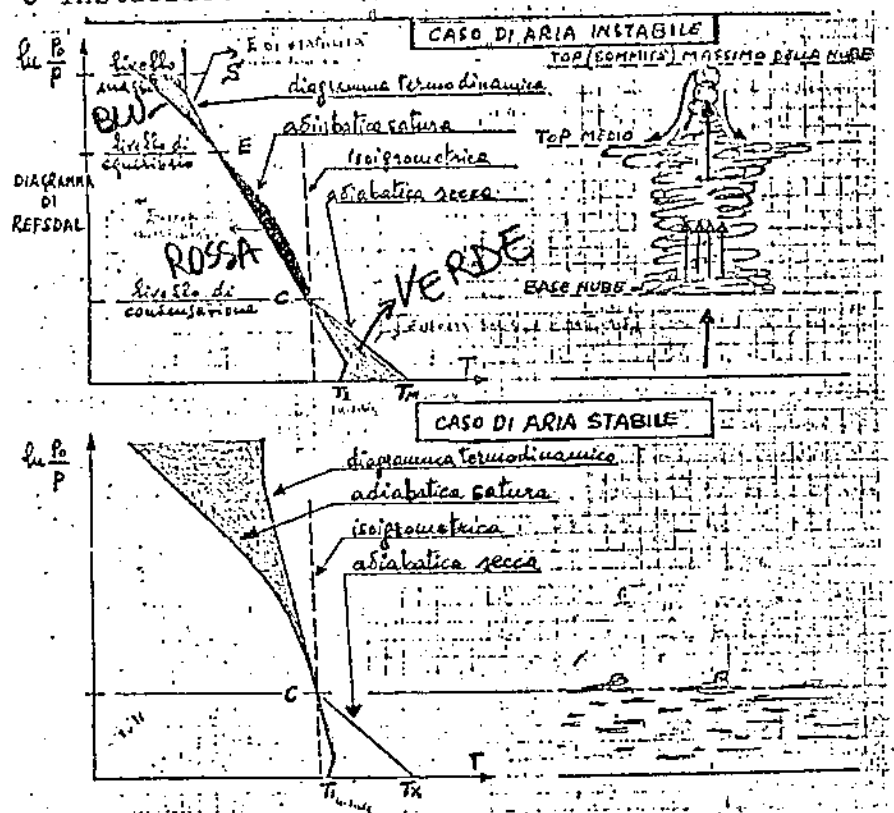
~~Se~~ Se il livello di equilibrio è in prossimità del suolo si formano banchi di nebbia o di strati bassi a bande alternati a bande di sereno

~~Se~~ Se il livello di equilibrio è sotto il livello del suolo l'aria fredda scaccia totalmente l'aria calda e si sostituisce violentemente ad essa provocando un rapido cambiamento del tempo.

~~Se~~ Se l'aria fredda, raggiunto il suolo, si incunea sotto la calda sollevandola e gradualmente allontanandola si ha un vero e proprio fronte freddo accompagnato da tutti i fenomeni suoi tipici

Vogliamo ora studiare quanto avviene nella atmosfera per effetto del riscaldamento diurno. Supponiamo di conoscere lo stato termico dell'atmosfera mediante un sondaggio eseguito prima che abbia inizio il riscaldamento, eseguito cioè nelle prime ore dell'alba e nella notte.

La massa d'aria può risultare (vedi figura di pagina) stabile o instabile: distinguiamo due casi schematici.



Caso di aria instabile (vedi figura pagina precedente)

Notiamo che tutte le considerazioni che seguono sono dei casi limite ideali nei quali si suppone che nella massa d'aria non ci siano rimescolamenti, cioè che le particelle considerate conservano la loro individualità senza scambi di energia o di umidità con l'ambiente.

Durante l'insolazione diurna il terreno si riscalda e le particelle d'aria a contatto col terreno, scaldandosi, tendono a salire in quota. Sia T_I la temperatura iniziale al suolo, cioè di notte (vedi figura); durante il riscaldamento la temperatura al suolo aumenta fino a T_M , temperatura massima. La particella che ha temperatura T_M sale secondo una adiabatica secca fino a che raggiunge la saturazione nel punto c; a questo livello comincia la condensazione e questo livello è quindi il livello della base della nube; la particella continua a salire seguendo una adiabatica satura; poiché l'aria è instabile, cioè l'adiabatica satura è a destra del diagramma di stato termodinamico dell'atmosfera in esame, la particella sale liberamente, cessando in ogni momento più calda dell'ambiente; questo processo dura fino al punto E, livello di equilibrio, dove l'adiabatica satura interseca la curva di stato; la particella da questo punto in su è più fredda dell'ambiente, ma continua a salire ancora un poco per inerzia, finché tutta la sua energia cinetica non viene trasformata in energia potenziale.

Perché abbia inizio lo sviluppo della nube è necessario che la temperatura al suolo raggiunga T_M ; a questo punto le bolle d'aria si sollevano continuamente man mano che raggiungono questa temperatura la quale non può più aumentare; essa è quindi, nelle ipotesi fatte, la temperatura massima.

In figura è riportato il diagramma di Refsdall in cui le aree sono proporzionali alle energie: l'area verde corrisponde all'energia che deve fornire il sole perché abbia inizio lo sviluppo della nube cumuliforme; l'area rossa è l'energia di instabilità che si trasforma in energia cinetica; l'area blu è l'energia di stabilità uguale all'energia di instabilità e delimita il livello massimo che può raggiungere la nube quando tutta l'energia cinetica (pari all'area rossa) si sia trasformata in energia potenziale (area blu). La parte del cumulo che si forma nella zona stabile dell'atmosfera, oltre il livello di equilibrio, non si ma tende a ritornare sotto il livello di equilibrio assumendo la caratteristica forma riportata in figura.

Notiamo che la base della nube che si forma col processo descritto è più alta di quella che si formerebbe per effetto di un sollevamento dinamico (anziché di un sollevamento per riscaldamento dal basso). Intendiamo per sollevamento dinamico la così detta convezione forzata, indotta da forze meccaniche (sollevamento frontale, sollevamento orografico, convergenza al suolo). In questo caso (sollevamento dinamico) la particella segue nel suo moto forzato verso l'alto un processo adiabatico secco, che partendo da una temperatura al suolo inferiore alla massima, incontrerà la isigrometrica di saturazione (a cui corrisponde la base della nube) a una quota inferiore che se partisse dalla temperatura massima (come avviene nel caso precedente del riscaldamento dal basso).

Caso di aria stabile (vedi seconda figura di pag.)

Durante l'insolazione diurna il terreno si riscalda e le particelle d'aria a contatto col terreno, scaldandosi, tendono a salire in quota. Sia T_I la temperatura iniziale al suolo, cioè di notte (vedi figura); durante il riscaldamento la temperatura dell'aria al suolo aumenta continuamente finché aumenta il riscaldamento del terreno con l'insolazione. In questo caso cioè non si avrà una temperatura massima dipendente dall'inizio della condensazione, ma una temperatura massima dipendente dal riscaldamento.

Sia T_x la temperatura ad un certo punto del riscaldamento; la particella con temperatura T_x sale secondo un'adiabatica secca fino a che raggiunge la saturazione nel punto c (punto di incontro della adiabatica secca con la igrometrica di saturazione); a questo livello comincia la condensazione e questo sarebbe quindi il livello della base della nube; la particella a questo punto, essendo la massa stabile, non può più salire (infatti la adiabatica satura sta a sinistra del diagramma termodinamico dell'atmosfera in esame); i cumuletti che via via cominciano a formarsi si disfanno, secondo una relativamente netta superficie di discontinuità che separa le masse superiori stabili, limpide, prive di nubi e poco umide dalle inferiori lattiginose, molto umide, quasi sature o localmente sature, anzi con molte goccioline che danno luogo a una intensa foschia, a un'atmosfera con scarsa visibilità.

L'ulteriore continuo aumento della temperatura al suolo (T_x) dopo l'inizio della condensazione (arrivo al punto c della figura), sposta verticalmente di poco la superficie di discontinuità senza innescare mai il fenomeno delle nubi convettive (tipiche di masse d'aria instabili). In questo caso (sta-

bilità) la temperatura al suolo aumenta più che nell'altro caso (instabilità) anche perché vicino al suolo non vi sono forti moti di ricambio.

Energia di formazione del cumulo. Calcoli.

Consideriamo una particella d'aria che si sposta verso l'alto dal livello di condensazione (c) in su; essa si comporta come una bolla con caratteristiche sue proprie immersa in un mezzo con differenti caratteristiche.

Su questa particella agisce la forza peso: $\vec{P} = \rho' \cdot V \cdot \vec{g}$ e la spinta di Archimede: $\vec{A} = -\vec{P} = -\rho \cdot V \cdot \vec{g}$

dove: $\vec{P}$ è il peso della particella che agisce verso il basso

$\vec{P}$ è il peso della massa spostata dalla particella che ha il segno meno perché agisce verso l'alto;

ρ' è la densità della bolla (aria calda che sale)

ρ è la densità dell'aria ambiente

V è il volume della bolla

$\vec{g}$ è l'accelerazione di gravità.

La forza totale che agisce sulla particella sarà:

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{P} = V \cdot \vec{g} \cdot (-\rho + \rho') \quad (\text{se } \rho' < \rho \text{ la spinta è verso l'alto})$$

La componente verticale della forza orientata verso l'alto sarà (cambiando tutto di segno): $F_z = V \cdot g \cdot (\rho - \rho')$

Riferendoci all'unità di massa che si sposta si ha:

$$F_z / m' = (V \cdot g \cdot (\rho - \rho')) / (V \cdot \rho') = g \cdot (\rho - \rho') / \rho'$$

(dove m' = massa unitaria che si sposta = $V \cdot \rho'$ = volume che si sposta $\times$ densità della bolla).

Dall'equazione dei gas perfetti: $p V = R T$; $p (1/\rho) = R T$;
 $\rho = (p/R T)$; per l'aria si ha: $\rho = (p/R_A T)$; notiamo che il T di quest'ultima relazione si deve intendere temperatura virtuale

per tener conto del contenuto di vapore; infatti in pratica la bolla è di aria umida o satura e nei nostri calcoli ci riferiamo per comodità ad aria secca (usando al posto della temperatura la temperatura virtuale) inoltre supponiamo che la pressione della bolla e dell'ambiente coincidano sempre durante il processo; e supponiamo ancora che la costante R_A sia la stessa per l'aria dell'ambiente e della bolla.

Sostituendo nell'ultima relazione scritta al posto della densità il valore dedotto dalla legge dei gas si ha:

$$\frac{F_z}{m'} = g \frac{\rho - \rho'}{\rho} = g \frac{\frac{p}{R_A T} - \frac{p}{R_A T'}} = g \frac{\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}}{\frac{1}{T'}} = g \frac{T' - T}{T}$$

Supponiamo che il lavoro fatto dalla forza si trasformi tutto in incremento di energia cinetica:

$$d\tau = dL = F_z \cdot dz$$

$$\text{dove } \tau = 1/2 \cdot m \cdot v^2$$

chiamando v_z velocità verticale (componente verticale della velocità) si ha:

$$d\tau = d\left(\frac{1}{2} \cdot m' \cdot v_z^2\right) = dL = F_z \cdot dz$$

$$\text{cioè: } \frac{d\tau}{m'} = d\left(\frac{1}{2} \cdot v_z^2\right) = \frac{dL}{m'} = \frac{F_z \cdot dz}{m'} = g \cdot \frac{T' - T}{T} \cdot dz$$

consideriamo l'equazione fondamentale della statica:

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dz = -g \cdot \frac{p}{R_A T} \cdot dz \quad \text{da cui} \quad dz = -\frac{R_A \cdot T}{g} \cdot \frac{dp}{p}$$

(dove T è la temperatura dell'aria ambiente)

Sostituendo questo valore di dz nella precedente si ha:

$$d\left(\frac{1}{2} \cdot v_z^2\right) = g \cdot \frac{T' - T}{T} \cdot dz = g \cdot \frac{T' - T}{T} \cdot \left(-\frac{R_A \cdot T}{g} \cdot \frac{dp}{p}\right)$$

$$\text{cioè: } d\left(\frac{1}{2} \cdot v_z^2\right) = -g \cdot \frac{T' - T}{T} \cdot \frac{R_A \cdot T}{g} \cdot \frac{dp}{p} = -R_A \cdot (T' - T) \cdot \frac{dp}{p}$$

e ponendo $-\frac{dp}{p} = d(\ln \frac{p_0}{p})$ si ha:

$$d\left(\frac{1}{2} \cdot v_z^2\right) = R_A \cdot (T' - T) \cdot d(\ln \frac{p_0}{p})$$

$$\text{Integrando si ha: } \frac{1}{2} \cdot (v_z^2 - v_1^2) = R_A \cdot \int_{p_1}^{p_2} (T' - T) \cdot d(\ln \frac{p_0}{p}) = A$$

La stessa espressione per variazioni finite si può scrivere: $\Delta A = -R_A \cdot (T' - T) \frac{\Delta p}{p}$

avendo posto $\Delta \ln \frac{p_0}{p} = -\frac{\Delta p}{p}$ il che è tanto più vero quanto più p è vicino a p_0 .

L'area totale sarà:

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_i (-R_A \cdot \frac{\Delta p}{p})_i \cdot (T' - T) =$$

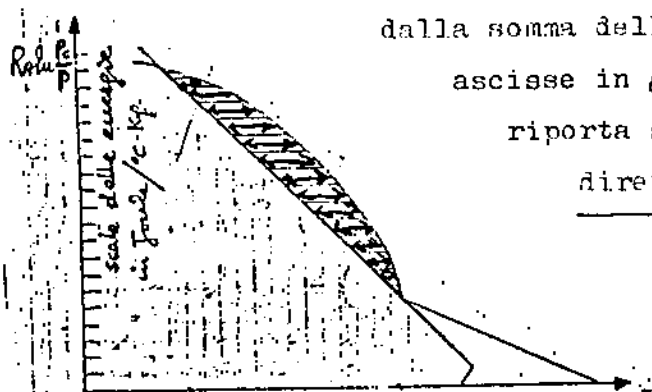
$$= (-R_A \cdot \frac{\Delta p}{p}) \sum_{i=1}^n (T' - T)$$

Per un conteggio facile e rapido dell'energia (Joule/°C kg) si fa in modo che quando $T' - T = 1^\circ\text{C}$ il fattore $(-R_A \frac{\Delta p}{p})$ sia 1, 10, 100,

cioè: $-R_A \frac{\Delta p}{p} = 10^{\text{intero}}$

In pratica su un diagramma di Refsdal sulle ordinate è riportata una graduazione ad intervalli uguali, corrispondenti appunto a 10^{intero} Joule/°C kg.

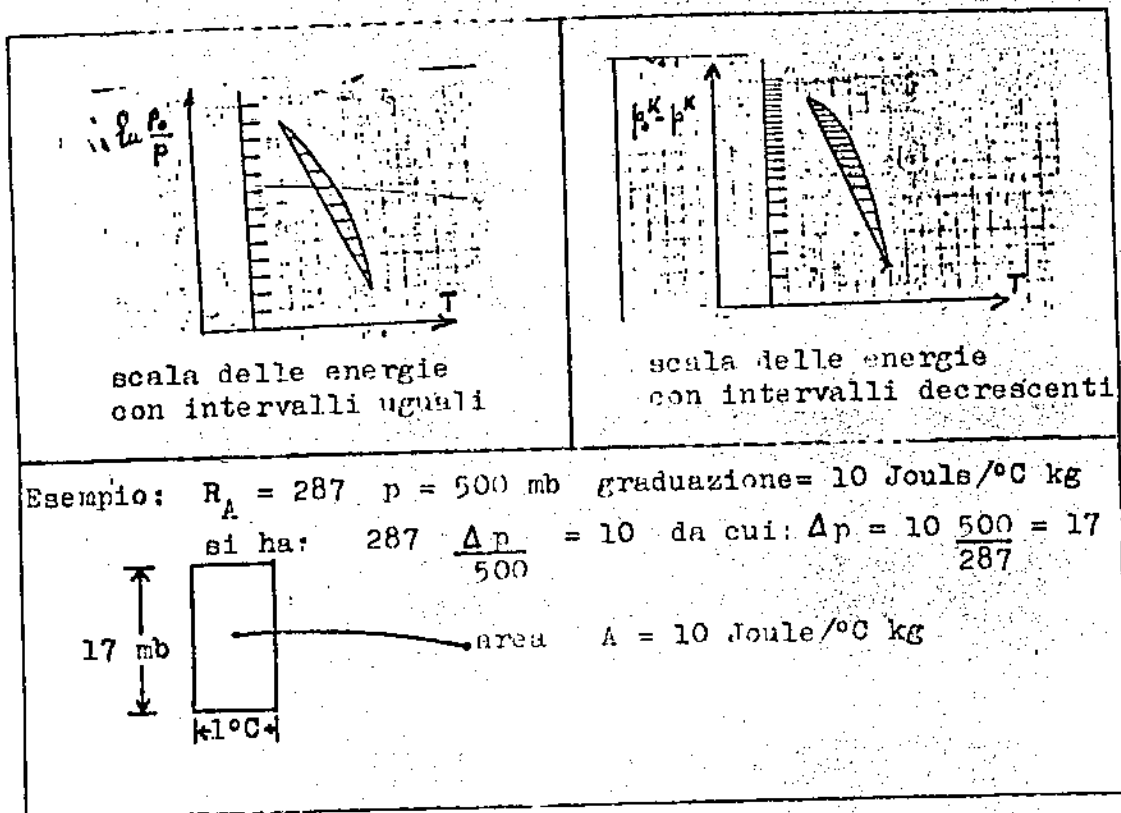
E' ovvio che l'ordinata dà un'area quando è moltiplicata per un'ascissa; l'ascissa sarà, in gradi, la sommatoria delle larghezze delle aree in cui la graduazione sulle ordinate divide l'area di instabilità (in figura la somma delle frecce). Si opera come segue (vedi figura): la lunghezza ottenuta



dalla somma delle frecce si misura sulle ascisse in gradi di temperatura, si riporta sulle ordinate e si legge direttamente l'energia.

Notiamo che gli intervalli uguali si hanno solo su un diagram-

ma energetico (come Refsdal); ma il procedimento è anche applicabile a diagrammi diversi (come Stüve) avendo cura di dividere la scala delle energie in intervalli variabili (in Stüve decrescenti) si deve rispettare le condizioni.



VIII. LEZIONE

Struttura microscopica delle nubi e delle nebbie. La pressione di vapore in presenza di goccioline di acqua pura e con soluto.

Le nubi e le nebbie sono costituite da goccioline di raggio dell'ordine di 10μ ; quando il raggio cresce fino a 30μ arrivano al suolo senza evaporare del tutto.

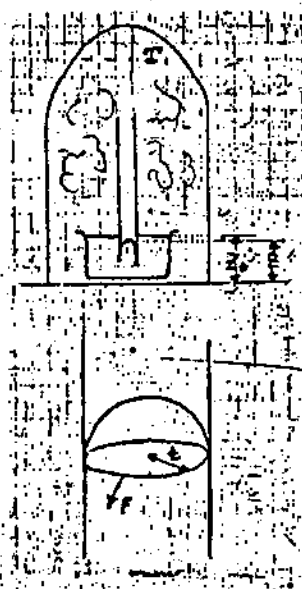
Si tratta di studiare l'andamento della pressione di vapore saturo in presenza di una superficie convessa e ciò può farsi con la seguente esperienza: consideriamo una campana di vetro con temperatura interna T e in essa poniamo un recipiente contenente acqua fusa; e nell'acqua immergiamo un tubo di plastica che l'acqua non bagna; indichiamo con z_0 il livello dell'acqua nel recipiente e con z il livello dell'acqua nel tubo; nell'ipotesi fatta sarà $z < z_0$.

Sia r il raggio del tubo. Indichiamo con $E_{0,\infty}$ la pressione di la pressione di vapore per la superficie piana (raggio infinito ∞) e con $E_{0,r}$ la pressione di vapore nel menisco convesso del tubo (raggio r). (il primo indice 0 si riferisce all'acqua pura). L'equazione fondamentale della statica per il dislivello fornisce la seguente relazione:

$$dp = - \rho \cdot g \cdot dz$$

che si può scrivere:

$$dp = - \frac{p}{R_A T} \cdot g \cdot dz$$



che per il vapore si scrive :

$$dE = - \frac{E}{R_v T} g dz$$

ed essendo, come si é supposto, l'ambiente isoterma, integrando tra gli opportuni limiti si ottiene:

$$\ln \frac{E_{0,z}}{E_{0,\infty}} = - \frac{g}{R_v T} (z - z_0)$$

dove $z - z_0 = -h$ rappresenta l'abbassamento del menisco.

Si tratta di determinare questo valore di h , tenendo presente che h rappresenta l'altezza della colonna liquida che fa equilibrio alla spinta del menisco, dovuta all'effetto della tensione superficiale.

Ricordiamo che la tensione superficiale τ é la forza per unità di lunghezza perpendicolare ad un taglio della superficie e parallela alla superficie stessa; o anche energia per unità di superficie:

$$\tau = \frac{F}{l} = \frac{E}{S}$$

Nel caso del menisco (vedi figura di pag. precedente) la forza si esercita lungo il bordo di contatto del liquido col tubo;

sarà $F = \tau l = \tau 2\pi r$ e poiché la sezione é $S = \pi r^2$ si ha: $F/S = \frac{2\tau}{r}$ come già visto.

Potremo quindi scrivere:

$$\Delta p = \rho_l g h = \frac{F_r}{S} = \frac{2\pi \tau r}{\pi r^2} = \frac{2\tau}{r}$$

da cui:

$$\rho_l g h = \frac{2\tau}{r} \quad h = \frac{2\tau}{\rho_l g r}$$

e inserendo questo valore nella relazione soprascritta si ha:

$$\ln \frac{E_{0,z}}{E_{0,\infty}} = - \frac{g}{R_v T} (z - z_0) = \frac{g}{R_v T} h = \frac{g}{R_v T} \frac{2\tau}{\rho_l g r}$$

e ponendo $k_r = \frac{2\sigma}{R_v T S_e}$ si ha: $\ln \frac{E_{0,2}}{E_{0\infty}} = k_r \frac{1}{r}$ (*)

Passando dai logaritmi ai numeri avremo:

$$E_{0,2} = E_{0\infty} e^{k_r \frac{1}{r}}$$

Da questa relazione si vede che k_r rappresenta il raggio in corrispondenza del quale la pressione di vapore saturo delle gocce è e-volte la pressione di vapore in superficie piana.

Una stima approssimata di k_r per:

$$\gamma = 75 \text{ dine/cm} = 75 \frac{10^{-5}}{10^{-2}} \text{ Newton/m} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ Newton/m}$$

$$S_e = 1000 \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$R_v = 460 \text{ Joule/kg}$$

$$T \approx 300^\circ \text{K}$$

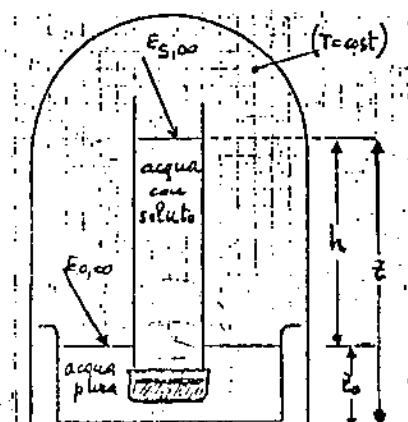
è la seguente: $k_r \approx \frac{2 \cdot 7,5 \cdot 10^{-2}}{46 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 10^3} = 10^{-9} \text{ metri} = 10^{-3} \mu$

Queste relazioni hanno validità quando ci si riferisce a raggi dell'ordine molecolare.

La formazione di gocce è favorita dalla presenza nell'aria di pulviscolo: particelle che favoriscono il processo di condensazione. Quando nell'ambiente c'è una soprassaturazione dell'800% si ha però l'inizio di una condensazione spontanea.

Ripetiamo ora l'esperienza fatta per tener conto della presenza nel liquido di eventuali impurezze, utilizzando un tubo molto largo in modo da rendere trascurabile l'effetto della tensione superficiale dovuto alla curvatura del menisco.

Il tubo è munito nell'estremità inferiore di una membrana semipermeabile che fa passare il solvente (acqua pura) ma non il soluto (un sale o altre sostanze presenti nell'atmosfera).



Riferendoci alla figura a lato, ripetendo quanto detto per la precedente esperienza si ha:

$$\ln \frac{E_{s,\infty}}{E_{0,\infty}} = - \frac{g}{R_r T} (z - z_0)$$

dove $h = (z - z_0)$ è in questo caso la colonna di liquido la cui pressione idrostatica fa equilibrio alla pressione osmotica che si esercita sulla membrana. Si ha:

$$\Delta p = \rho_s g h \quad (\text{pressione idrostatica})$$

$$\Delta p \cdot V = \frac{m_s}{M_s} R^* T = \frac{m_s}{M_s} R_s T \quad (\Delta p = \text{pressione osmotica})$$

da cui $\Delta p = \frac{m_s R_s T}{V}$ ed eguagliando $\rho_s g h = \frac{m_s R_s T}{V}$

da questa relazione

$$\rho_s g h = \frac{m_s R_s T}{V}$$

estraendo h si ha:

$$h = z - z_0 = \frac{m_s R_s T}{V} \frac{1}{\rho_s g}$$

e sostituendo questo valore di h nella soprascritta relazione

$$\ln \frac{E_{s,\infty}}{E_{0,\infty}} = - \frac{g (z - z_0)}{R_r T} = - \frac{g}{R_r T} \frac{m_s R_s T}{V} \frac{1}{\rho_s g}$$

Semplificando e ricordando che $\rho_s V =$ è la massa della soluzione = massa dell'acqua = m_t se la soluzione è diluita si ha:

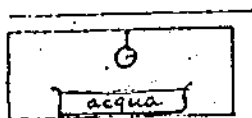
$$(1) \quad \ln \frac{E_{s,\infty}}{E_{0,\infty}} = - \frac{m_s R_s}{R_r m_t} = - \frac{m_s / M_s}{m_t / M_t} = - \frac{m_s}{m_t}$$

Da questa relazione si vede che perché la pressione di vapore si riduca ad $\frac{1}{e}$ di quella dell'acqua pura in superficie piana occorre che $u_s = u_t$, cioè che il numero delle molecole di soluto

sia uguale al numero di molecole d'acqua.

Se invece del tubo largo si fa il tubo sottile si avrebbe un abbassamento del menisco dovuto alla tensione superficiale e indicando con E_{s2} la pressione di vapore saturo in soluzione e con raggio r si ha:

$$(2) \quad \ln \frac{E_{s2}}{E_{0\infty}} = k\tau \frac{1}{r} - \frac{u_s}{u_e}$$



Se consideriamo la figura e la goccia di raggio r (supposta ferma su un pelo) in equilibrio con l'ambiente dove è posta in acqua in superficie piana si ha:

$$k\tau \frac{1}{r} = \frac{u_s}{u_e}$$

Nel caso della goccia il volume sarà: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

La (1) si può scrivere:

$$\ln \frac{E_{s0}}{E_{0\infty}} = - \frac{u_s R_s}{R_v u_e} = - \frac{1}{R_v} \frac{u_s R_s}{\rho_s \cdot \frac{4}{3} \pi r^3} = - k_s \frac{1}{r^3}$$

avendo posto

$$k_s = \frac{u_s R_s}{R_v e_s \frac{4}{3} \pi}$$

E in questo caso (goccia con soluto e con raggio r) la (2) diventa:

$$\ln \frac{E_{s2}}{E_{0\infty}} = k\tau \frac{1}{r} - k_s \frac{1}{r^3}$$

VIII LEZIONE

Seguito microstruttura rubi; equazione di equilibrio per goccioline con soluto; calcolo per casi particolari della curva di equilibrio.

Effetto delle cariche elettriche per energia per unità di superficie paragonabile a quello della tensione superficiale. Calcolo di casi particolari.

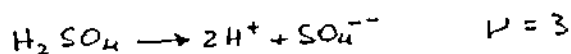
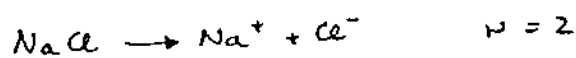
Abbiamo visto la relazione che lega la pressione di vapore delle goccioline con soluto (qualche sostanza che si scioglie in esse) e raggio r alla pressione di vapore per acqua pura in superficie piana

$$(1) \quad \ln \frac{E_r}{E_\infty} = k_r \frac{1}{r} - \frac{\mu_s}{\mu_l}$$

Questa, facendo intervenire il volume di una goccia, si può scrivere in maniera più generale. Dall'ultima sezione del capitolo precedente:

$$(2) \quad \ln \frac{E_r}{E_\infty} = - \frac{1}{R_v} \frac{\mu_s R_s}{\rho_l \frac{4}{3} \pi r^3} = - k_s \frac{1}{r^3}$$

(dove: ρ_l = densità del liquido $\approx$ densità della soluzione) introducendo un fattore ν che tenga conto se le particelle (le singole molecole) sono dissociate o no, cioè ν = numero degli ioni che si formano quando le particelle si dissociano e sia α = coefficiente dipendente dalla concentrazione, dalla temperatura, etc. Esempio:



Possiamo scrivere la massa del soluto tramite la seguente

relazione: $w_s = \rho_s \cdot \varphi \cdot l^3$ dove ρ_s è la densità del soluto, φ è un coefficiente di forma della particella che si scioglierà, l è una dimensione della particella.

Introducendo nella (2) α, ν ed $w_s = \rho_s \cdot \varphi \cdot l^3$ si ha:

$$\ln \frac{E_{s\infty}}{E_{\infty}} = -\alpha \nu \frac{\rho_s \cdot \varphi \cdot l^3}{\rho_e} \frac{R_s}{R_v \frac{4}{3} \pi r^3} \approx -\frac{\alpha \nu \varphi}{4} \frac{\rho_s}{\rho_e} \frac{n_v}{n_s} \left(\frac{l}{r}\right)^3$$

avendo approssimato a 4 il valore $\frac{4}{3} \pi$ e avendo sostituito:

$$R_s/R_v = n_v/M_s$$

Nel caso particolare che la sostanza disciolta sia NaCl (come del resto più frequentemente accade) possiamo supporre che i cristallini siano cubici (non un cubo liscio, ma a spigoli vivi come in figura) per cui si ha:



$$\begin{aligned} \nu &= 2 \quad (\text{le due particelle } Na^+ \text{ e } Cl^-) \\ \varphi &= 1 \quad (\text{cubo}) \\ \alpha &= 1 \quad (\text{se supponiamo che la dissociazione in acqua sia completa, anche se la soluzione è concentrata}) \end{aligned}$$

ciò si ha:

$$\ln \frac{E_{s\infty}}{E_{\infty}} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{4} \cdot 2,5 \cdot \frac{18}{58} \left(\frac{l}{r}\right)^3 = -0,4 \left(\frac{l}{r}\right)^3$$

poiché

$$\frac{\rho_s}{\rho_e} = 2,5$$

ed

$$\frac{n_v}{n_s} = \frac{18 (H_2O = 1+1+16) \text{ peso molecolare del vapore}}{58 (NaCl = 23+35) \text{ peso molecolare del sale}} \approx 0,31$$

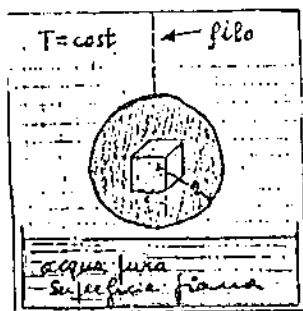
e la (1) diventa:

$$(3) \quad \ln \frac{E_{sr}}{E_{\infty}} \approx k_r \frac{1}{r} - k_s \left(\frac{l}{r}\right)^3 \quad \text{dove } k_s \approx 0,4$$

Notiamo che k_r ha le dimensioni di r e k_s è adimensionale.

Quando si forma una gocciolina su un nucleo di condensazione che contenga NaCl (cioè la goccia scioglie NaCl) si ha per esempio, con $l=1\mu$ (da notare che un nucleo col lato di 1μ è piuttosto grosso), r in μ , e k_r in μ ($10^{-3}\mu$) indicando con $k_{(e)} = k_r l^3$ (cioè il k che tiene conto del fattore l^3) si ha:

$$\ln \frac{E_{s,r}}{E_{\infty}} = (10^{-3}\mu) \frac{1}{r} - (0,4 \cdot 1\mu) \frac{1}{r^3}$$



L'equilibrio tra la pressione di vapore saturo della gocciolina di raggio r con soluto ($E_{s,r}$) e la pressione di vapore saturo per acqua pura in superficie piana (E_{∞}) si ha quando:

$$E_{s,r} = E_{\infty} \Rightarrow \ln \frac{E_{s,r}}{E_{\infty}} = 0$$

da cui:

$$(4) \quad \ln \frac{E_{s,r}}{E_{\infty}} = k_r \frac{1}{r} - k_{(e)} \frac{1}{r^3} = 0$$

quindi:

$$k_r \frac{1}{r} = k_{(e)} \frac{1}{r^3} \quad \text{da cui} \quad r^2 = \frac{k_{(e)}}{k_r} = \frac{0,4}{10^{-3}} = 400$$

cioè

$$r = \sqrt{400} = 20\mu$$

Dalla figura (in scala) si vede la dimensione di una gocciolina con raggio di 20μ in confronto al cristallino con lato di 1μ .

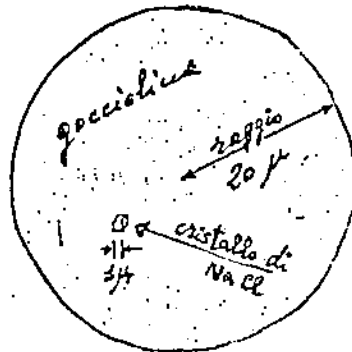
Cioè: la soluzione è molto diluita.

Riportiamo ora in un diagramma

(ascissa il raggio e ordinata il

$\ln \frac{E_{s,r}}{E_{\infty}}$) la relazione (4).

La curva che si ottiene è ottenuta



come somma di due curve:

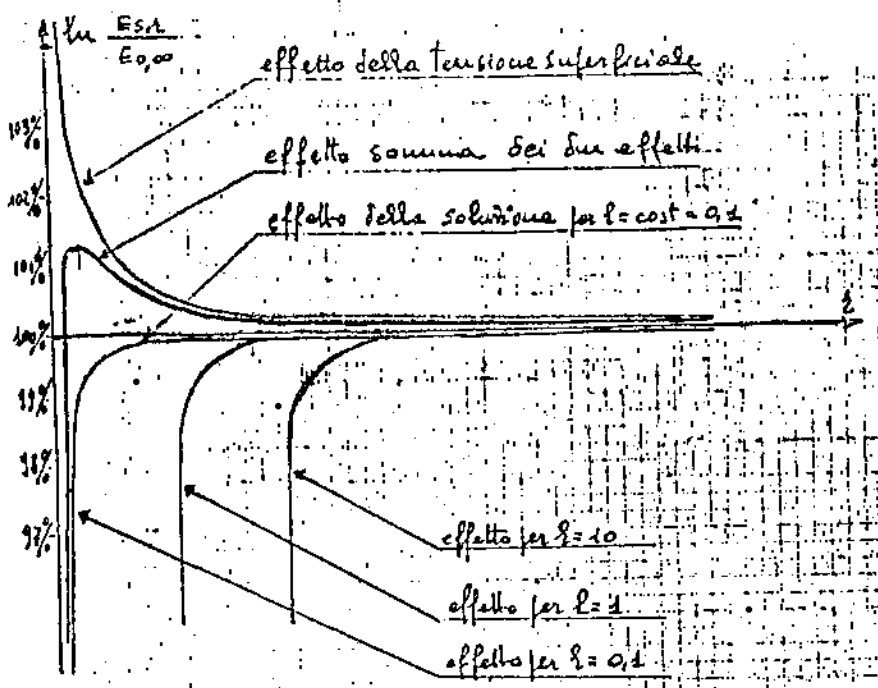
1) iperbole equilatera di equazione $\ln \frac{E_{s,r}}{E_{\infty}} = k r \frac{1}{r}$

2) cubica di equazione $\ln \frac{E_{s,r}}{E_{\infty}} = k(e) \frac{1}{r^3}$

Notiamo che per ogni valore di l otteniamo una cubica.

La (4) è somma di una iperbole equilatera e di una cubica (negativa); per un dato $l = \text{cost.}$ il valore che si ha al variare di r è somma algebrica di due termini; se si fa variare l di un fattore 10, $k(e)$ varia di un fattore 1000.

Consideriamo il caso in cui l sia uguale a uno;



Notiamo che il rapporto $\frac{E_{s,r}}{E_{\infty}}$ rappresenta l'umidità relativa che avrebbe una massa d'aria in equilibrio con le goccioline (la massa d'aria deve avere la pressione di vapore $e = E_{s,r}$) rispetto all' E_{∞} , in quanto l'umidità relativa è: $u = \frac{e}{e(T)}$; considerando $E_{s,r}$ poco diverso da E_{∞} , il rapporto lo possiamo scrivere, nell'intorno di $E_{s,r} \rightarrow E_{\infty}$, nel seguente modo:

$$\ln \frac{E_{sr}}{E_{\infty}} = \frac{E_{sr} - E_{\infty}}{E_{\infty}} \approx u - 1 = \frac{U\% - 100}{100}$$

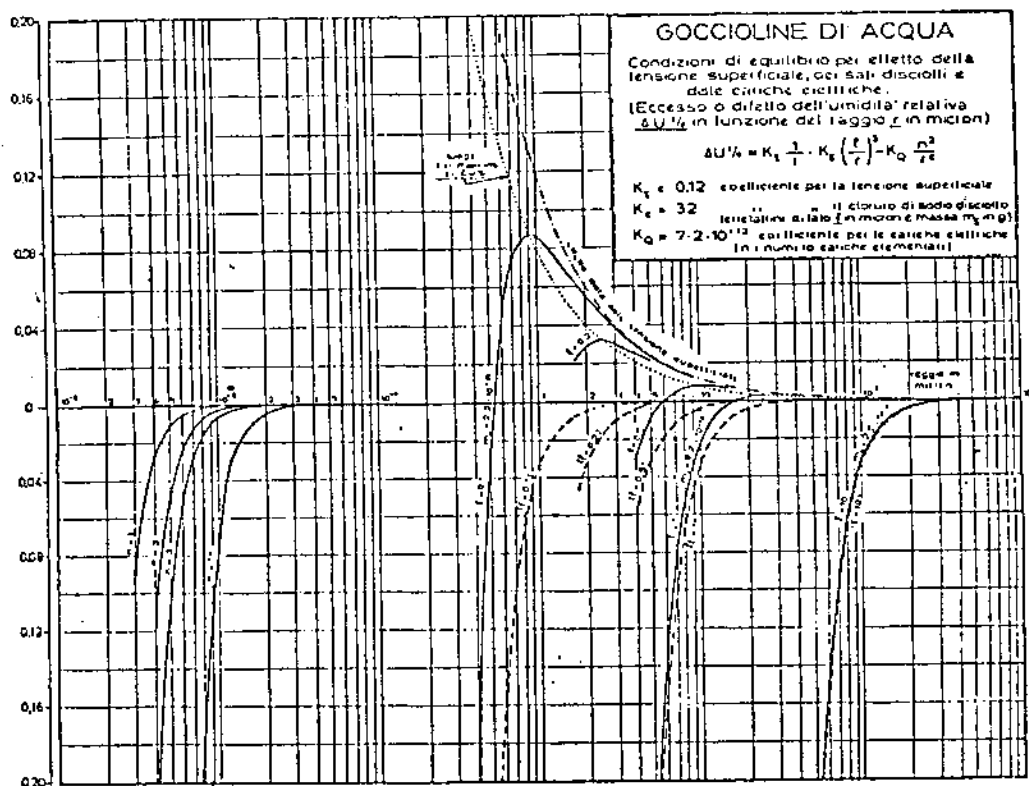
Nota:

$\ln \frac{x}{x_0}$ nell'intorno di $x = x_0$ è uguale a zero.

Il differenziale del logaritmo è: $d \ln \frac{x}{x_0} = \frac{dx}{x}$

passando a variazioni finite: $\Delta \ln \frac{x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta x}{x_0}$

(è importante la differenza $\Delta x = x - x_0$ ma al denominatore è lo stesso porre x oppure x_0)



$$\ln \frac{E_{sr}}{E_{\infty}} = \frac{U\% - 100}{100} = k\tau \frac{1}{r} - k(e) \frac{1}{r^2}$$

da cui:

$$(5) \quad U\% = 100 + 100 k\tau \frac{1}{r} - 100 k(e) \frac{1}{r^2}$$

Notiamo che per $\ln \frac{E_{s2}}{E_{\infty}} = 0$ si ha $U\% = 100$ e che la scala é logaritmica.

E' vero che la (5) é una formula approssimata ma in realtà va bene in quanto in pratica si é sempre piuttosto vicini ai valori della pressione di vapore dell'acqua pura in superficie piana (cioé E_{s2} é in pratica molto vicino ad E_{∞}) si può vedere come si sia vicini a questi valori, basta notare che perché la pressione di vapore divenga 3 volte (più esattamente 6 volte) quella di acqua pura in superficie piana, il raggio delle goccioline per effetto della tensione superficiale doveva essere 10^{-9} metri ($1 / 1000 \mu$)

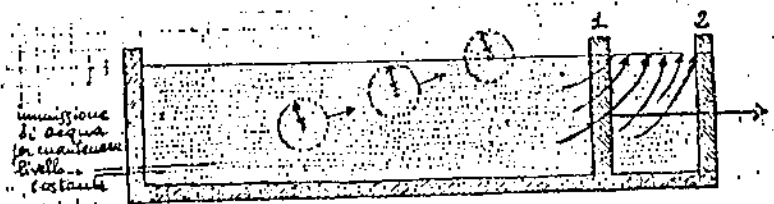
Se abbiamo un ambiente in cui l'umidità relativa sia piuttosto bassa, le goccioline si mettono in equilibrio con quella umidità relativa, cioè le goccioline (col soluto) acquisteranno una certa dimensione che é in equilibrio con $U\%$ dell'ambiente; se l' $U\%$ é bassa (vedi diagramma di pagina precedente) avranno un raggio piccolo; se l' $U\%$ ambiente aumenta aumenteranno di dimensione; con $U\%$ crescente, r cresce (così accade alla sera quando la foschia - cioè goccioline di raggio piccolo - si trasforma in nebbia - goccioline di raggio grande). Ciò accade fino al punto di massimo della curva (la curva in rosso della figura): a quel punto che segna il limite della reversibilità del processo le goccioline tendono ad aumentare di raggio rapidamente. Dopo questo massimo se la goccia cresce ancora la pressione del vapore dell'ambiente decresce, la goccia formandosi libera calore e poiché i sistemi tendono ad evolversi in modo da liberare calore (in modo di aumentare la loro entropia) il fenomeno é irreversibile: la tendenza teorica sarebbe ad $r = \infty$ per fare avere l' $U\%$ al 100%. Il processo in pratica viene limitato dalla disponibilità di vapore nell'ambiente; in pratica non si trat-

ta di una gocciolina isolata che possa prendere tutto il vapore dell'ambiente; in realtà le goccioline si limitano vicendevolmente. Il grafico rappresenta in ogni punto una condizione di equilibrio, quindi, se, fissate le condizioni ambiente, il raggio della gocciolina, per un caso fortuito, dovesse essere diverso (più grande o più piccolo) da quello di equilibrio, esso tenderà a portarsi a quello di equilibrio.

Il processo inizia con raggi dell'ordine del μ e poi passa a raggi dell'ordine di qualche decina di μ .

Riparlino della tensione superficiale.

Supponiamo di avere un recipiente a parete mobile con livello costante (il livello si può tenere costante con qualche artificio)



Consideriamo una particella ed il raggio d'azione delle sue forze di coesione (forze di Van der Waals); a tante molecole che si trovano nella metà della sfera del raggio d'azione corrispondono in media tante molecole dell'altra in modo che le forze si equilibrino. Quando una particella si avvicina alla superficie e la sua sfera d'azione finisce per toccare la superficie libera, da quel momento in poi, per portare la molecola in superficie occorre fare lavoro per vincere le forze di attrazione di Van der Waals. (Notiamo che è la sfera d'azione e non la particella che esce fuori!). Ora allontaniamo la parete mobile dalla posizione 1 alla posizione 2, mantenendo il livello costante nel recipiente; occorre fare un lavoro per portare in super-

ficie tutte le molecole che stanno verso la parete in movimento, per tutto uno spessore pari al raggio d'azione.

Aumentando la superficie libera è stata aumentata l'energia potenziale del sistema. Ricordiamo che la tensione superficiale è uguale alla forza per unità di lunghezza, forza normale al taglio e tangente alla superficie libera.

$$(6) \tau = \frac{df}{dl} = \text{forza per unità di lunghezza}$$

ma anche:

$$\tau = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{d\varepsilon_{\text{est}}}{ds} = \text{energia per unità di superficie}$$

la forza esterna sarà:

$$f = \tau \cdot l$$

Il lavoro esterno sarà: $d\varepsilon_{\text{est}} = \tau \cdot l \cdot ds = \tau ds$

dove $ds = l \cdot ds$ = incremento della superficie libera del liquido.

ripetiamo la (*) di pag.

$$(7) \quad \ln \frac{E_{02}}{E_{0\infty}} = \frac{2\tau}{RvTg_e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \frac{d\varepsilon}{ds}}{RvTg_e} \cdot \frac{1}{2}$$

(abbiamo posto $\tau = \frac{d\varepsilon}{ds}$ nella (*) detta)

Potremo quindi considerare quello che succede alla goccia di acqua pura ma con carica elettrica, vedendo come varia l'energia di questa goccia per una data carica al variare della superficie della goccia stessa. Notiamo che è lo stesso per il sistema che la variazione d'energia sia dovuta a forze di Van der Waals (tensione superficiale) o a cariche elettriche.

Ricordiamo l'espressione che dà l'energia di un condensatore carico:

$$(8) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad C = \frac{Q}{V}$$

Supponiamo di avere una goccia con $Q = \text{cost.}$ (goccia per goccia) C varia con la forma della goccia, e che per una sfera isolata

nello spazio é: $C = 4\pi\epsilon_0 r^2$ dove ϵ_0 = costante dielettrica nel vuoto e nell'aria; sostituendo si ha;

$$(9) \tau = \frac{d\epsilon}{dS} = \frac{1}{2} Q^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{dc}{dS} \right) \quad \begin{array}{l} \text{variazione di energia per unit\`a} \\ \text{di superfice per effetto della ca-} \\ \text{rica } Q \text{ della goccia.} \end{array}$$

Poich :

$$\left. \begin{array}{l} S = 4\pi r^2 \\ C = 4\pi\epsilon_0 r^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} dS = 8\pi r dr \\ dc = 4\pi\epsilon_0 dr \end{array} \quad \frac{dc}{dS} = \frac{4\pi\epsilon_0 dr}{8\pi r dr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0}{r}$$

La (9) diventa

$$\frac{d\epsilon}{dS} = \frac{1}{2} Q^2 \left(-\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0}{r} \right) = -\frac{1}{64\pi^2\epsilon_0} Q^2 \frac{1}{r^3}$$

Se non ci fosse la tensione superficiale, cio  supponendo come caso limite di avere la sfera soggetta soltanto alla carica Q ,

la (7) diventa:

$$(10) \quad \ln \frac{E_{0,2}}{E_{0,\infty}} = \frac{2 \left(-\frac{1}{64\pi^2\epsilon_0} Q^2 \frac{1}{r^3} \right)}{R_v \pi p_e} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R_v T p_e} \frac{1}{r^4}$$

cio :

$$\ln \frac{E_{0,2}}{E_{0,\infty}} = -K(Q) \frac{1}{r^4}$$

dove:

$$K(Q) = \frac{1}{32} \frac{1}{\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{R_v T p_e} Q^2$$

Supponiamo di avere una goccia sferica di raggio r , per la quale non esiste la tensione superficiale ma esista la carica Q ; vediamo che l'effetto della carica elettrica sulla pressione di vapore   dato dalla (10) dove $K(Q)$   una funzione della carica elettrica.

Se mettiamo insieme i due effetti vediamo che hanno segno opposto :

-La tensione superficiale tende ad aumentare la pressione di vapore (7)

-La carica elettrica tende a diminuire la pressione di vapore (10)
 ha: cioè un effetto analogo a quello delle sostanze disciolte (miscugli o soluzioni).]

Possiamo scrivere $Q^2 = e^2 \cdot u^2$

dove: e = carica elettrica elementare $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb

u = numero di cariche elettriche (1, 2, 3 elettroni)

ϵ_0 = costante dielettrica assoluta $= 8,856 \cdot 10^{-12} \approx 10^{-11}$

Sostituendo:

$$k(Q) = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^{-11}} \cdot \frac{1}{460 \cdot 300 \cdot 10^8} \cdot 2,6 \cdot 10^{-38} u^2 \approx 5 \cdot 10^{-38} m^2$$

Se consideriamo insieme i due effetti (carica elettrica e tensione superficiale) si ha (per $n=1$ una sola carica elementare):

$$\ln \frac{E_{0,2}}{E_{0\infty}} = k_r \frac{1}{r} - k(Q) \frac{1}{r^4} \text{ da cui } k_r \frac{1}{r} - k(Q) \frac{1}{r^4} = 0$$

per avere l'equilibrio dei due effetti; cioè:

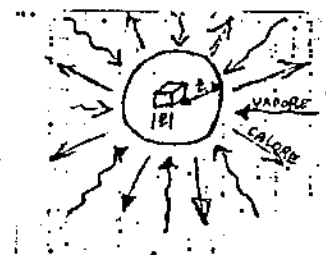
$$r^3 = \frac{k(Q)}{k_r} = \frac{5 \cdot 10^{-14}}{10^{-3}} = 50 \cdot 10^{-12} \text{ da cui } r = \sqrt[3]{50 \cdot 10^{-12}} = 3,4 \cdot 10^{-4}$$

IX LEZIONE

La diffusione nei processi di accrescimento ed evaporazione delle goccioline - generalità - conduzione elettrica, di calore, diffusiva di vapore. Caso stazionario ideale - conduzione in funzione della forma e della differenza di potenziale, di temperatura, di pressione di vapore. Impostazione del problema per condizioni stazionarie per una gocciolina grossa.

Consideriamo ora i casi di non equilibrio: in particolare un tipo di meccanismo per cui le gocce crescono o diminuiscono cioè il vapore va a condensare sulla goccia oppure questa evapora: ciò implica un movimento di vapore per diffusione attraverso l'aria.

Consideriamo una sola gocciolina isolata in un ambiente infinito dove la pressione di vapore dell'ambiente (e) sia maggiore di ($E_{s,r}$) alla temperatura (T) dell'ambiente: in queste condizioni del vapore fluirà dall'ambiente verso la gocciolina che crescerà tendendo ai valori di equilibrio fissati dalla (e). Ma questo fenomeno di diffusione non avviene indipendentemente da altri fenomeni anzi si vede subito che quel vapore, se va a condensare, libera il calore latente di condensazione, il che significa aumento della temperatura (t') della gocciolina e quindi aumento di ($E_{s,r}$) verso il valore (e); questo fatto rallenterebbe il processo se, così come arriva il vapore dall'ambiente, non sfuggisse per conduzione



termica diffusiva il calore della gocciolina verso l'ambiente che ha temperatura (t) , in modo tale che (t') risultino più maggiore di (t) . Il processo è rallentato ma non bloccato. Ci si preoccupa ora di studiare le condizioni di equilibrio fra il vapore che fluisce dall'ambiente verso la gocciolina ed il calore che fluisce da questa verso l'ambiente. Il problema diventa più complesso se invece di considerare una sola gocciolina in ambiente infinito, consideriamo più goccioline in ambiente limitato; ma non tratteremo questo caso.

Ricordiamo alcuni concetti e definizioni sulla carica elettrica: a) le cariche elettriche con il loro movimento in un conduttore di forma qualsiasi e dimensione provocano una corrente di una certa intensità e punto per punto; nel conduttore, tale corrente ha una certa densità. b) La densità di corrente è definita dalla relazione:

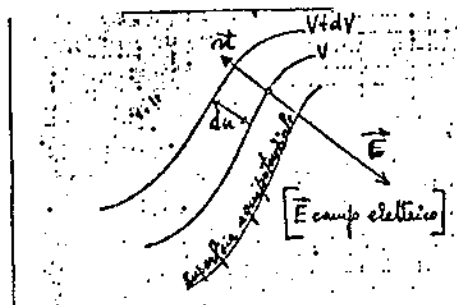
$$\vec{J} = \frac{dQ}{dS dt} \vec{J} = - \frac{dQ}{dS dt} \vec{n}$$

dove $\vec{J}$ è il versore normale alle superfici equipotenziali che può essere indicato col versore $\vec{n}$; occorre inoltre mettere il segno - in quanto $\vec{n}$ versore ha verso opposto al campo elettrico

$\vec{E}$ (cfr figura). Infatti $\vec{J}$ è il versore che va verso i potenziali più bassi, $\vec{n}$ va verso i potenziali più alti. Noi consideriamo soltanto il modulo, sarà quindi:

$$(1) \quad J = \frac{dQ}{dS dt}$$

cioè: la densità di corrente, è la quantità di carica che nell'unità di tempo attraversa l'unità di superficie normalmente al flusso delle cariche. c) Il flusso della densità di



corrente, attraverso una superficie S finita è definito come segue:

$$(2) \quad \Phi_s(\vec{J}) = \int_s \vec{J} \cdot \vec{n} dS = i = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_s$$

dove $\vec{n}$ in questo caso è il versore normale alla superficie S ed i è l'intensità di corrente, cioè la quantità di carica per unità di tempo attraverso una sezione qualunque del conduttore.

Il vettore $\vec{J}$ può anche essere scritto (legge di Ohm):

$$\vec{J} = c \vec{E}$$

dove c = conducibilità elettrica; $\vec{E}$ = intensità di campo elettrico. Al posto di $\vec{E}$ possiamo scrivere l'ascendente del potenziale cambiato di segno:

$$(3) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad - \frac{\partial V}{\partial n} = E_n$$

dove E_n è la componente del campo elettrico secondo la normale alle superfici equipotenziali.

Le relazioni scritte riguardanti la densità e l'intensità di corrente non sono sempre valide nel campo elettrico, ma valgono solo in casi limitati: quando la velocità media delle cariche elettriche sottoposte al campo sia proporzionale al campo stesso ed abbia la stessa direzione; in altre parole, finchè le cariche si muovono in un campo per esse viscoso, seguono le linee di forza del campo, cosa che non avviene quando si hanno nel campo delle correnti convettive (esempio: tubo a raggi catodici nel quale il pennello elettronico viene deviato dal campo delle piastrelle). Un altro esempio, opposto a quello citato, per cui valgono le formule scritte è quello del processo elettrolitico in cui le cariche hanno velocità proporzionale al campo e direzione identica.

In modo analogo possiamo considerare una densità di cor-

rente di calore:

$$(4) \quad \vec{J}(\varrho) = - \frac{d\varrho}{ds dt} \vec{n} = - c_{\varrho} \vec{\nabla} T$$

La densità di corrente di calore è la quantità di calore che per unità di tempo attraversa l'unità di superficie; possiamo chiamarla intensità di campo termico l'ascendente di temperatura, mentre c_{ϱ} è la conduttività termica ed il segno meno indica che la densità di corrente di calore ha segno opposto all'ascendente della temperatura.

Analogamente possiamo considerare una densità di corrente di vapore:

$$(5) \quad \vec{J}(\nu) = - \frac{d\nu}{ds dt} \vec{n} = - c_{\nu} \vec{\nabla} e$$

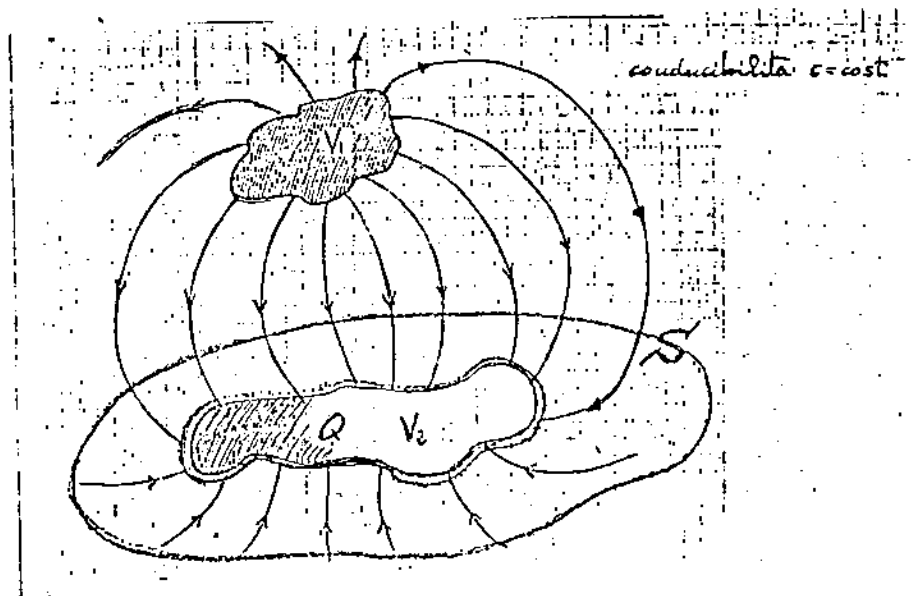
la densità di corrente di vapore è la quantità di vapore che per unità di tempo attraversa l'unità di superficie e $\vec{\nabla} e$ è l'ascendente della pressione di vapore che possiamo chiamare intensità di campo barico di vapore e c_{ν} è la conducibilità di vapore per diffusione.

Dalle (4) e (5) possiamo derivare i flussi, le grandezze sono poste in forma analoga a quanto fatto nella (2) per il campo elettrico:

$$(6) \quad \Phi_s(\vec{J}_2) = i_2 = \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)_s$$

$$(7) \quad \Phi_{\nu}(\vec{J}_{\nu}) = i_{\nu} = \left(\frac{d\nu}{dt} \right)_s$$

Tornando al campo elettrico, si abbiano due conduttori a potenziali diversi V_1 e V_2 (cfr figura) per cui esista un certo campo elettrico tra i due. Fra tali conduttori si abbia



un mezzo debolmente conduttore (come aria con cariche elettriche); ci si domanda che intensità di corrente fluisca dal primo al secondo conduttore attraverso il mezzo avente conduttività $C = \text{cost}$. Tale corrente è quella che attraversa una qualunque superficie chiusa S che racchiuda uno dei due elettrodi; per comodità la S viene posta a contatto di uno degli elettrodi. Dobbiamo calcolare la (2):

$$(2) \quad i = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad \text{dove} \quad \vec{j} = c \vec{E}$$

per cui:

$$i = c \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = c \int_S E_n dS$$

Tracciando la superficie S fino a farla coincidere con il conduttore si ha:

$$i = \frac{c}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_S \sigma dS$$

ricordando che il vettore induzione elettrica $\vec{D}$ è uguale alla costante dielettrica nel vuoto moltiplicata per la costante dielettrica nel mezzo moltiplicata per la differenza di potenziale: $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ e che in vicinanza della superficie $E_n = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} D_n$ dove $D_n = -\sigma = \frac{dQ}{dS}$ = densità di carica superficiale cioè quantità di carica esistente sull'areola dS quindi $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ quindi:

$$(8) \quad i = \frac{c}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_S dQ = \frac{c}{\epsilon_0 \epsilon_r} Q$$

dove Q è la carica che è sul conduttore attorno cui è posta la superficie. La Q totale possiamo scriverla come capacità del sistema fra due conduttori per la differenza di potenziale e quindi

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1}$$

da cui:

$$(9) \quad i = \frac{c}{\epsilon_0 \epsilon_r} C (V_2 - V_1)$$

ricordando che se ho un conduttore in vuoto con dielettrico omogeneo è $C = \epsilon_r C_0$ si ha :

$$i = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_S = c \frac{C_0}{\epsilon_0} (V_1 - V_2)$$

notiamo che c = conducibilità elettrica; C_0 = capacità del sistema nel vuoto. Poiché la capacità nel vuoto dipende solo dalla geometria del sistema chiameremo il rapporto C_0/ϵ_0 coefficiente di forma F_0 quindi:

$$(10) \quad i = c F_0 (V_1 - V_2)$$

Siccome matematicamente le tre espressioni della densità sono identiche (1), (4), (5), facendo un calcolo analogo per la dif-

fusione di vapore da una superficie evaporante verso una superficie condensante avremo analoghe espressioni (come la (10)) con coefficiente di forma appropriati, identici matematicamente ad F_0 , cioè:

$$(1) \quad \vec{J} = -c \vec{\nabla} V \quad (11) \quad \left(\frac{dQ}{dt}\right)_s = \dot{q} = c F_0 (V_1 - V_2)$$

$$(4) \quad \vec{J}(Q) = -c_2 \vec{\nabla} T \quad (12) \quad \left(\frac{dQ}{dt}\right)_s = \dot{q}_2 = c_2 F_0 (T_1 - T_2)$$

$$(5) \quad \vec{J}(v) = -c_v \vec{\nabla} e \quad (13) \quad \left(\frac{dm_v}{dt}\right)_s = \dot{m}_v = c_v F_0 (e_1 - e_2)$$

Per l'aria, in condizioni normali di temperatura e pressione, i valori dei coefficienti di conducibilità sono:

$$c_2 = 2,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Joule}}{\text{m} \cdot \text{sec} \cdot \text{oc}} \quad \text{conducibilità termica}$$

$$c_v = 1,8 \cdot 10^{-10} \quad \text{sec} \quad \text{conducibilità per diffusione di vapore}$$

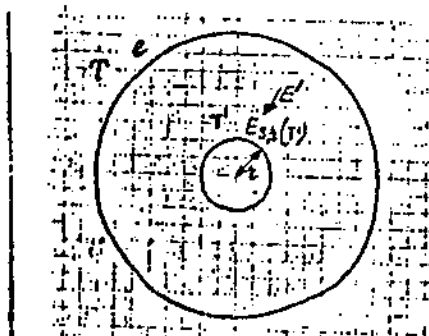
Consideriamo una gocciolina di raggio r a temperatura T' , pressione di vapore saturo $E_{s,r}(T')$ posta in un mezzo indefinito con temperatura T e pressione di vapore e . Se l'ambiente lo consideriamo sferico, ricordando la capacità di un condensatore sferico nel vuoto $C_0 =$

$= 4\pi\epsilon_0 r$, il coefficiente di forma sarà:

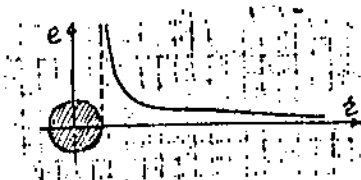
$$F_0 = \frac{C_0}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\epsilon_0 r}{\epsilon_0} = 4\pi r$$

In questo caso (una sola gocciolina in un ambiente indefinito) il valore di F_0 da introdurre nelle (11), (12), (13) sarà proprio

$4\pi r$. Notiamo che durante il processo fisico che asporta calore o asporta vapore dalla gocciolina, le condizioni della gocciolina variano (variazione di temperatura, di massa, di



raggio); se per esempio in una goccia sopraffusa a -20°C introduciamo un germe di ghiaccio, la goccia in parte solidifica e assume di colpo la temperatura di 0°C in un ambiente che si trova a -20°C ; la gocciolina in pratica per un certo tempo non è in condizioni di equilibrio con l'ambiente. Facciamo un altro esempio (vedi figura); partiamo dalla goccia con un certo raggio r ed una pressione di vapore che è quella di saturazione; arriveremo gradualmente alla pressione di vapore ambiente.



Tutte queste considerazioni mettono in evidenza come istante per istante la gocciolina cresce o cala, si riscalda o si raffredda, non praticamente mai in condizioni di equilibrio statico; tuttavia noi, per studiare il fenomeno, considereremo ogni istante come istante di equilibrio dinamico, cioè come se si fosse in regime di equilibrio (equilibrio stazionario dell'ambiente con la gocciolina), come se istante per istante il sistema fosse a "regime".

In queste ipotesi di "regime" conduciamo lo studio per trovare la relazione che lega le pressioni di vapore (della goccia e dell'ambiente) e le temperature (della goccia e dell'ambiente) dalla quale relazione risaliremo alla "velocità di accrescimento della gocciolina" (accrescimento o decremento) posta in un certo ambiente dove c'è una certa pressione di vapore e una certa temperatura.

Il flusso di vapore dall'ambiente alla gocciolina sarà:

$$(14) \quad \dot{m}_v = \left(\frac{dm_v}{dt} \right)_s = C_v f_0 (e - E') \quad \text{massa di vapore che condensa nell'unità di tempo.}$$

dove E' è la pressione di vapore di equilibrio della gocciolina quale essa è, con il suo raggio, la sua temperatura, il suo soluto, la sua tensione superficiale. Il calore che nella gocciolina si accumulerebbe per il calore latente di evaporazione che si va liberando in essa in relazione del vapore che fluisce dall'ambiente verso la gocciolina sarà:

$$(15) \quad \dot{q}_2 = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_S = l_e \frac{dm_v}{dt} = l_e \cdot C_v \cdot T_0 (e - E')$$

Questa quantità di calore data dalla (15) deve essere perduto dalla gocciolina perché la sua temperatura resta costante; sarà:

$$(16) \quad \dot{q}_2 = \left(\frac{dQ}{dt} \right)_S = C_2 F_0 (T' - T)$$

Perché la temperatura della gocciolina non vari il calore che arriva deve essere uguale al calore che parte:

$$(17) \quad l_e \cdot C_v \cdot (e - E') = C_2 (T' - T)$$

Da quest'ultima intanto notiamo l'eliminazione di F_0 , cioè: il regime di equilibrio è indipendente dalla forma del sistema.

La (17) è la relazione cercata che lega le due pressioni di vapore (goccia e ambiente) e le due temperature (goccia e ambiente) oppure si può dire che lega le due pressioni di vapore alla differenza di temperatura tra la gocciolina e l'ambiente. Notiamo che l'equazione (17) ha due incognite (E', T'); in realtà E' dipende dalla temperatura della gocciolina, dal raggio, dal cristallo di lato $\mathcal{L}$ disciolto in essa; ma se noi consideriamo gocce molto grandi (si da poter trascurare l'effetto del raggio, cioè della tensione superficiale) e con raggio molto maggiore del lato del cristallo disciolto (si da poter

trascurare l'effetto delle sostanze disciolte) ci si riduce al caso di "acqua pura in superficie piana" e quindi E' diventa soltanto funzione della temperatura.

Partendo dalla relazione seguente:

$$\ln \frac{E_{s,r}(T)}{E_{o,\infty}(T_0)} = k_t (t-t_0) + k_v \frac{1}{n} + k_e \frac{1}{n^3}$$

si possono quindi trascurare il 2° e il 3° termine del secondo membro:

$$\ln \frac{E_{s,r}(T)}{E_{o,\infty}(T_0)} = k_t (t-t_0)$$

Formula di
Magnus

Cercheremo ora l'espressione che lega E' a $(T' - T)$ in modo che la (17) si riduca a una sola incognita. Partiamo dall'equazione di Clapeyron:

$$\frac{dE}{E} = \frac{L_e}{R_v T^2} dT$$

ponendo $K_t = L_e / R_v T^2$ si ha, essendo $dE = E' - E$ e $dT = T' - T$,

$$\frac{E' - E}{E} = k_t (T' - T) \longrightarrow E' - E = E K_t (T' - T)$$

$$(18) \quad E' = E + E K_t (T' - T) \longrightarrow E' = E [1 + K_t (T' - T)]$$

dove E' è la pressione di vapore della gocciolina (in regime) quale essa è col suo raggio, con la sua temperatura etc. Introducendo nella (17) il valore di E' della (18) si ha:

$$L_e C_v \left\{ e - E [1 + K_t (T' - T)] \right\} = C_2 (T' - T)$$

Questa equazione è a una sola incognita $T = T' - T$; semplificando ed isolando l'incognita si ha, poiché $e = u E$

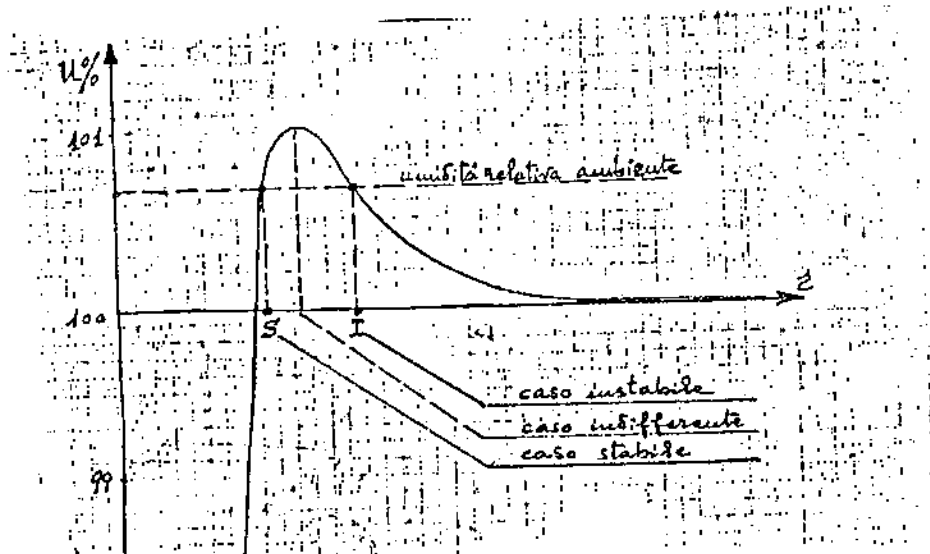
$$(19) \quad T' - T = \frac{\frac{C_2}{E L_e C_v} (T' - T) = \underbrace{u - 1}_{\Delta u} - K_t (T' - T)}{\frac{C_2}{E L_e C_v} + K_t}$$

Nota : abbiamo posto $\Delta u = u - 1$ che è la differenza tra l'umidità relativa dell'ambiente e la saturazione (non è un incremento di umidità!); naturalmente se noi conoscessimo le dimensioni della goccia e del cristallo potremmo far intervenire anche la tensione superficiale e l'effetto del soluto che invece abbiamo trascurato. Ma anche in queste limitazioni possiamo vedere che, date le condizioni dell'ambiente (pressione di vapore e temperatura), il problema ammette soluzione che si trova risolvendo la (19).

Una volta trovata la differenza di temperatura $T' - T$ potremo introdurre questo valore nella (17) e ricavare $(e - E')$ che introdotto nella (14) ci dà la velocità di accrescimento della goccia, cioè la massa di cui aumenta la goccia nell'unità di tempo. Notiamo che le limitazioni fatte non sono così lontane dalla realtà come potrebbe a prima vista sembrare; esse sono abbastanza lecite; nel caso infatti di una goccia grossa (per es. 1 mm) formatasi su di un nucleo grande (per es. $1 + 10 \mu$) vediamo che le tensioni superficiali, di concentrazione e di curvatura sono trascurabili, per cui $E_{s,r}$ è praticamente uguale a E_0 .

(X) LEZIONE

Considerazioni generali sull'equilibrio delle goccioline.



Consideriamo (vedi figura) la curva che dà per ogni raggio della gocciolina le condizioni dell'umidità relativa con le quali la gocciolina è in equilibrio. Evidentemente si tratta di una curva relativa ad un determinato valore di $\frac{1}{r}$ lato del nucleo di condensazione, che fissa il tipo di curva (vedi lezione pagg.).

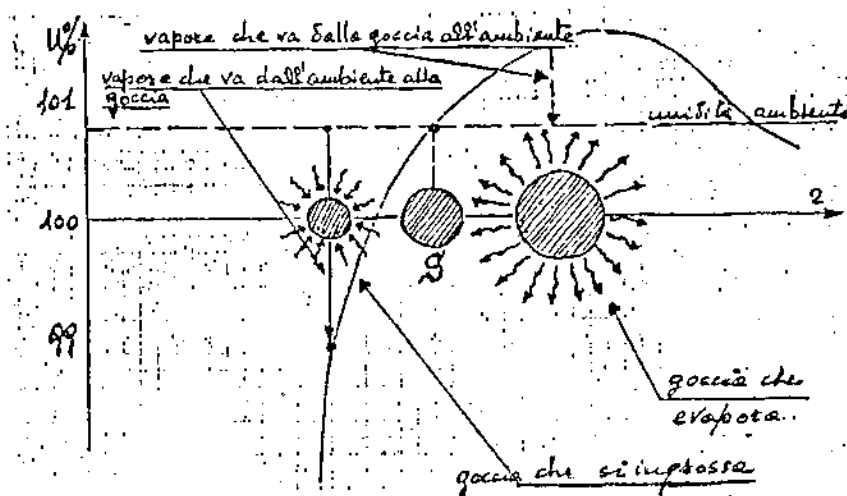
Supponiamo di avere ad un certo istante una umidità relativa "ambiente" (superiore al 100%) come indicato in figura. Con questa umidità fissata, si hanno due possibili raggi, corrispondenti alle due intersezioni della curva con la retta indicante l'umidità. Indichiamo i due raggi con S e con I consideriamo separatamente i due casi.

1° caso - raggio più piccolo - (in figura raggio S)

Supponiamo che per una qualche ragione non precisata, una qualsiasi perturbazione, il raggio della gocciolina vari; aumenti

o diminuisca di lunghezza. Se assume un raggio un po' maggiore di quello che gli compete per le condizioni di umidità ambiente e quindi assume una pressione di vapore propria (cioè nelle immediate vicinanze della sua superficie) più alta di quella ambiente, cioè la gocciolina tende ad evaporare fino a tornare al raggio che aveva prima della supposta perturbazione.

Analogamente se assume un raggio un po' minore di quello che gli compete per le condizioni di umidità ambiente e quindi assume una pressione di vapore propria più bassa di quella dell'ambiente, dall'ambiente passerà vapore verso la gocciolina, cioè la gocciolina tenderà ad ingrossarsi fino a tornare al raggio che aveva prima della supposta perturbazione.



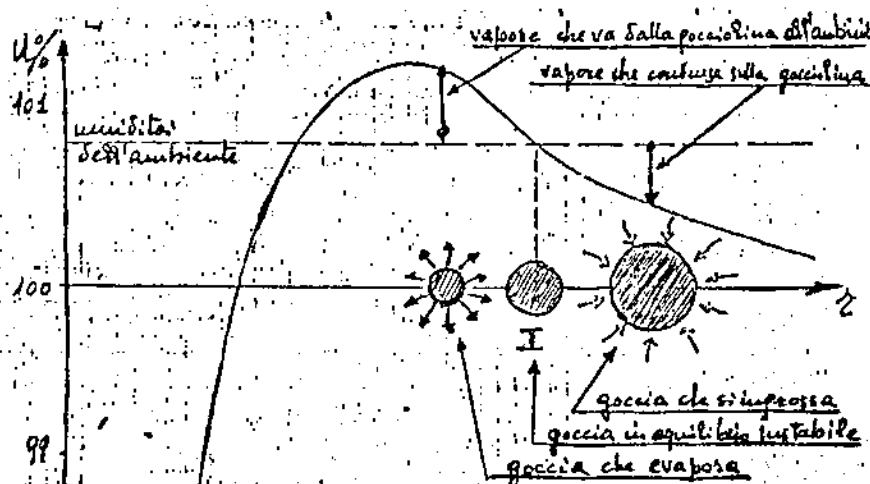
In figura 2, esagerando le grandezze delle goccioline è mostrato l'andamento del fenomeno.

Nelle figure le indicazioni dell'umidità in ordinata sono esagerate; in realtà le soprassaturazioni sono dell'ordine dei decimi o centesimi di un per cento.

Concludendo comunque viene spostata la gocciolina dalla sua posizione di equilibrio essa tenderà a tornarci; quindi la curva ha una parte a cui corrispondono posizioni di equilibrio

STABILE ed è quella parte che sta a sinistra del massimo, detta zona dei raggi STABILI.

2° caso - raggio più grande - (in figura 1 raggio I)



Facciamo le stesse considerazioni che nel 1° caso, cioè supponiamo che il raggio vari, aumenti o diminuisca.

Se assume un raggio un po' maggiore di quello che gli compete per le condizioni di umidità ambiente e quindi assume una pressione di vapore propria minore di quella ambiente, dall'ambiente fluirà vapore verso la gocciolina cioè la gocciolina tenderà ad ingrossarsi e ad allontanarsi ulteriormente dalla posizione iniziale.

Analogamente se assume un raggio un po' minore di quello che gli compete per le condizioni di umidità dell'ambiente (che supponiamo sempre costante) e quindi con una pressione di vapore propria più alta di quella dell'ambiente, dalla gocciolina fluirà vapore verso l'ambiente, cioè la gocciolina tenderà ad evaporare, il suo raggio tenderà a diminuire ulteriormente fino al punto corrispondente al massimo della curva, a cui corrisponde l'equilibrio indifferente.

Concludendo comunque viene spostata la gocciolina dal-

la sua posizione iniziale essa non tenderà a tornarci ma ad allontanarsene ulteriormente; a questa parte della curva corrispondono posizioni di equilibrio instabile: è la parte della curva che sta a destra del massimo, detta zona dei raggi INSTABILI.

Il punto che separa, sulla curva, la zona dei raggi stabili da quella dei raggi instabili è un punto di equilibrio indifferente e si trova al massimo della curva.

L'studio fatto si riferisce evidentemente ai casi teorici, in cui fra l'altro si considerano le condizioni di umidità dell'ambiente stazionaria.

Supponiamo ora che le condizioni ambientali siano in lenta variazione partendo da una umidità molto bassa (per esempio dell'80%) a cui corrisponde un ben determinato raggio della gocciolina; man mano che l'umidità cresce il raggio della gocciolina si assesta nel valore che via via gli compete; questo processo si svolge finché l'umidità dell'ambiente raggiunge il valore massimo della curva; fino a questo punto un eventuale abbassamento dell'umidità dell'ambiente produce una riduzione del raggio della gocciolina; proseguendo però nell'aumento dell'umidità oltre il massimo della curva il processo di accrescimento del raggio è solo in un senso, cioè ad un eventuale abbassamento dell'umidità non corrisponde una diminuzione del raggio della gocciolina. Anzi, una volta superato il massimo, il processo di accrescimento è sempre più rapido perché è sempre più grande la differenza fra la pressione di vapore ambiente e quella di equilibrio per la gocciolina; inoltre un'ulteriore aumento dell'umidità dell'ambiente agisce solo nel senso di accelerare il processo.

Se poi, nel caso reale di moltissime goccioline che cre-

scendo portano via tutta l'umidità dell'ambiente, così agiscono, accrescendosi in modo da togliere umidità all'ambiente, l'ambiente non potendo restare a umidità costante, scende a livelli troppo bassi di umidità e il processo si interrompe.

Il processo non si interrompe se le condizioni dell'ambiente sono altrimenti imposte, come avviene per esempio quando l'aria si riscalda in un processo adiabatico di aria satura discendente in cui le goccioline vanno evaporando e tornano indietro nella curva perché la pressione ambiente li riconduce verso i raggi piccoli. Quando invece l'umidità cresce ed arriva a valori molto alti, oltre il massimo della curva, le goccioline continuano a crescere secondo l'andamento della curva ma il processo viene accelerato.

In natura questi processi sono molto veloci: è per questo motivo che le umidità relative sono sempre molto vicine al 100%; infatti non appena si ha anche una piccola sovrassaturazione, il velocissimo processo di accrescimento delle goccioline entra in funzione per riportare l'umidità relativa al 100%. Nel diagramma di pag. si può vedere come le sovrassaturazioni che entrano in gioco sono dell'ordine di frazioni dell'1%; si tratta cioè di sovrassaturazioni non misurabili coi migliori igrometri in uso.

I N D I C E

PARTE I

Elementi di meteorologia dinamica:

Le equazioni fondamentali della meteorologia	1
Forze di pressione	2
Forze di attrito	3
Il sistema (7) nella forma euleriana	6
Analisi di scala	8
Una prima approssimazione: il vento geostrofico	9
Numero di Rossby	11
Equazione dell'idrostatica	14
Vento termico	16
Vento ciclostrofico e vento di gradiente	20
Equazione di continuità	24
Sistema di approssimazione quasi statica	26
Condizioni al contorno sulla superficie terrestre	30
Rapporto tra lo step di tempo e di spazio	32
Sistema di riferimento x, y, p	33
Vorticità ed equazione della vorticità in x, y, p	34
Approssimazione del livello medio	38
Approssimazione quasi geostrofica	41
Temperatura potenziale	42

Schemi di integrazione numerica	45
Fronti, superfici frontali e formula di Margules	48
Appendice A - La turbolenza	
Introduzione	55
Formulazione matematica	57
L'attrito - il vento	64
Evaporazione	70
Conduzione turbolenta di calore	73
Esercizi e complementi	
Calcolo delle velocità verticali	79
Carte meteorologiche	81
Calcolo del vento geostrofico e metodo delle differenze finite	83
Realizzazione di un regolo per il calcolo del vento geostrofico	90
Calcolo della vorticità e operatore di Laplace in differenze finite	92
Inversione di un laplaciano: un metodo di "Relaxation"	95
Avvezione di temperatura	98
Diagrammi termodinamici verticali	100
Stabilità dell'atmosfera	100
Altezza di mescolamento	106
Acqua precipitabile	106
Bibliografia	108

PARTE II

Elementi di micrometeorologia:

Cenni sul bilancio termoradiativo dell'atmosfera	110
--	-----

PARTE III

Estratto dalle "Lezioni del corso di meccanica e termodinamica dell'atmosfera" tenute dal Prof. G. Pea e raccolte da G. Capodicasa, Genovese, Rossi (A.A. '1972-73)":

<u>I Lezione</u> : vapor d'acqua nell'atmosfera-pressione di vapor saturo e suo andamento-formula di Clapeyron- I e II principio della termodinamica- umidità assoluta-rapporto di mescolanza-isoigrometriche- equazione di stato per aria umida-temperatura virtuale e suo significato	139
<u>II Lezione</u> : termodinamica della miscela aria - vapor d'acqua	160
<u>III Lezione</u> : temperatura potenziale, temperatura equivalente	164
<u>IV Lezione</u> : adiabatiche reversibili per aria saturata come isoentropiche-concetti introduttivi-formula finale esatta	169
<u>V Lezione</u> : semplificazione della relazione dell'adiabatica satura reversibile- - - significato sinottico di e -linee di flusso per aria secca o con fenomeni di condensazione.	173
<u>VI Lezione</u> : applicazione delle adiabatiche di aria satura e non satura-fronti e fenomeni orografici-il cumulo nel modello reversibile: energia di formazione, suo calcolo-valutazioni pratiche: scale	181
<u>VII Lezione</u> : struttura microscopica delle nubi e delle nebbie-la pressione di vapore	

in presenza di goccioline di acqua pura e con
 soluto 194

VIII Lezione: seguito microstruttura nubi-
 equazione di equilibrio per goccioline con
 soluto-calcolo per casi particolari della
 curva di equilibrio-effetto delle cariche
 per energia per unità di superficie paragona-
 bile a quello della tensione superficiale-
 calcolo di casi particolari 199

IX Lezione: La diffusione nei processi di
 accrescimento ed evaporazione delle goccio-
 line-conduzione elettrica, di calore, diffu-
 siva di vapore-caso stazionario ideale-impos-
 sibilità del problema per condizioni staziona-
 rie per una gocciolina grossa 209

X Lezione: considerazioni generali sull'equi-
 librio delle goccioline 220

APPENDICE B

Note sull'equazione della vorticità, sulla ciclogene
si e sui fronti.

1

I. L' EQUAZIONE DELLA VORTICITA' NEL SISTEMA x,y,z

Nella I parte delle dispense a pag. 34 era stata ricavata l'equazione della vorticità nel sistema di riferimento che aveva la pressione come coordinata verticale. La variazione locale di vorticità assoluta era data, secondo la ricordata equazione, dall'avvezione di vorticità, dalla divergenza orizzontale, termine che tiene conto del fatto che l'aria, divergendo, acquista vorticità negativa dovuta alla forza di Coriolis, e da un termine che indica trasferimento di vorticità da un piano all'altro. Tuttavia l'equazione così espressa non indica esplicitamente un'altra causa di variazione locale di vorticità assoluta: l'esistenza di un gradiente orizzontale di temperatura. Per evidenziare questo termine, ricaviamo la equazione della vorticità dalle equazioni orizzontali del moto nel sistema x,y,z:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Se ora derivo parzialmente la 1° rispetto ad y e la seconda rispetto ad x e sottraggo la prima dalla seconda ottengo l'equazione della vorticità:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \frac{df}{dy} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \right]$$

posso anche scrivere, poiché f dipende solo da y cosicché

$$\frac{df}{dt} = v \frac{df}{dy}$$

e allora:

$$\frac{d}{dt}(z+f) = -(z+f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

L'ultimo termine è il termine "in più" rispetto all'equazione in x, y, p e viene chiamato "solenoidale". Per la discussione dei primi tre termini ci si riferisce, mutatis mutandis, (per esempio nella fig. 2 a pag 36 ricordarsi che $\omega \approx -fgw$ e che l'asse della coordinata p ha il suo verso positivo verso il basso, mentre l'asse z è diretto verso l'alto), all'equazione in x, y, p . Per quanto riguarda il termine solenoidale, in esso compaiono i gradienti orizzontali di densità e pressione. Poiché la densità è proporzionale alla temperatura, il termine solenoidale tiene conto della variazione orizzontale di temperatura che contribuisce ad una vera e propria creazione di vorticità, mentre gli altri termini (avvezione, divergenza, tubi di vortice) indicano soprattutto una ridistribuzione di vorticità.

II. NOTA SULLA CICLOGENESI

In modo del tutto generale si può dire che la ciclogenesi (= nascita di un ciclone) avviene quando ad un certo istante in un dato luogo per una causa qualsiasi si verifica una diminuzione di pressione; essa poi, dando luogo ad una convergenza d'aria, causerà una circolazione ciclonica (antioraria nello emisfero Nord) a causa della deviazione della forza di Coriolis. Tutto questo è schematizzato qui sotto.



E' da notare l'importanza della forza deviante di Coriolis nella generazione di un vortice: all'equatore infatti ($f = 0$) i cicloni non si formano.

Vogliamo ora quantificare parzialmente ciò che è stato detto, cercando di trovare un'espressione per la variazione di vorticità $\frac{\partial \zeta_0}{\partial t}$ che tenga conto di quello che succede anche ai livelli superiori dell'atmosfera.

Possiamo scrivere innanzitutto:

$$V_0 = V_{500} - (V_{500} - V_0) \quad \Rightarrow \quad \zeta_0 = \zeta_{500} - \zeta_r$$

dove V_{500} e ζ_{500} si riferiscono al livello di 500 mb.

Derivando rispetto al tempo ottengo:

$$(1) \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_{500}}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_r}{\partial t}$$

Devo ora trovare un'espressione per i termini a secondo membro della (1): $\frac{\partial \zeta_{500}}{\partial t}$ la ottengo dall'equazione della vorticità sempli-

ficata per il livello medio di 500 mb:

$$\frac{\partial z_{500}}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}(z+f)$$

Il termine $\frac{\partial z_r}{\partial t}$ si ricava nel seguente modo:

si può far vedere che l'equazione termodinamica può assumere la forma:

$$(2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla T + (\Gamma_a - \Gamma) \omega + \frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt}$$

dove $\Gamma_a = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_a$, proporzionale al gradiente di temperatura per aria secca o saturata, a seconda dello stato dell'aria; e

$\Gamma = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)$ gradiente verticale reale di temperatura.

La (2) stabilisce che la variazione locale di temperatura a primo membro è causata dall'avvezione orizzontale di temperatura, dall'avvezione verticale di temperatura e dal termine di riscaldamento non-adiabatico $\left(\frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt} \right)$

Integrando la (2) tra 1000mb (supposta pressione al suolo)

e 500mb ho:

$$\int_{1000}^{500} \frac{\partial T}{\partial t} d(\ln p) = \int_{1000}^{500} -\vec{V} \cdot \nabla T d(\ln p) + \int_{1000}^{500} (\Gamma_a - \Gamma) \omega d(\ln p) + \int_{1000}^{500} \frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt} d(\ln p)$$

utilizzando l'equazione idrostatica integrata:

$$\frac{g}{R} \Delta h = -T d(\ln p)$$

ottengo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{g}{R} \Delta h \right] = - \left[\frac{g}{R} (-\vec{V} \cdot \nabla (\Delta h)) \right] + \overline{(\Gamma_a - \Gamma) \omega \ln \frac{p_{500}}{p_{1000}}} + \frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt} \ln \frac{p_{500}}{p_{1000}}$$

divido per f ed applico ∇^2 ad entrambi i membri, ottenendo:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (z_r) = -\frac{Rg}{fR} \nabla^2 A_+ + \frac{R}{f} \nabla^2 \left[\overline{(\Gamma_a - \Gamma) \omega \ln \frac{p_{500}}{p_{1000}}} \right] + \frac{R}{f} \nabla^2 \left[\frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt} \ln \frac{p_{500}}{p_{1000}} \right]$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} (z_r) = \frac{R}{f} \nabla^2 \left[g A_+ + \ln \frac{p_{1000}}{p_{500}} \left(\overline{(\Gamma_a - \Gamma) \omega} + \frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt} \right) \right]$$

dove $A_T = -\vec{V} \cdot \nabla(\Delta h)$, ed ho utilizzato l'espressione della vorticità geostrofica $\zeta_T = \frac{g}{f} \nabla^2(\Delta h)$

L'equazione così ricavata stabilisce le cause della variazione locale di ζ_T : il primo termine del secondo membro è proporzionale al laplaciano dell'avvezione di temperatura (ricordarsi che l'equazione idrostatica stabilisce la proporzionalità tra temperatura e spessore dello strato d'aria compreso tra le pressioni p_0 e p_1); il 2° termine è il riscaldamento e il raffreddamento dovuto alle correnti ascendenti o discendenti, il 3° è il calore fornito alla massa d'aria non adiabaticamente.

A questo punto si è in grado di calcolare $\frac{\partial \zeta_0}{\partial t}$ (al suolo) dalla formula già ricordata:

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_{500}}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial t}$$

Poiché nell'equazione ricavata precedentemente a secondo membro appaiono termini in cui è presente l'operatore ∇^2 , è bene mettere in evidenza quale sia il significato fisico dell'operatore laplaciano.

Si può dimostrare per una funzione di tipo sinusoidale nelle variabili x e y che il suo laplaciano orizzontale è proporzionale alla lunghezza d'onda della funzione ed alla valore della funzione stessa; a questo fine assumiamo che il campo A_T vari in modo sinusoidale in x e in y :

$$A_T = B \sin kx \sin ly$$

(E' da notare che questa ipotesi non è restrittiva in quanto ogni funzione continua e limitata può essere espressa in serie di Fourier in x e y). I numeri d'onda sono definiti:

$$k = \frac{2\pi}{L_x} \quad l = \frac{2\pi}{L_y}$$

dove L_x ed L_y sono le lunghezze d'onda nelle direzioni di x e y rispettivamente. Il laplaciano orizzontale di A_r è:

$$\nabla^2 A_r = -(k^2 + l^2) A_r$$

Si vede che il valore assoluto del $\nabla^2 A_r$ è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda e direttamente proporzionale al valore della funzione.

ESERCIZIO

Ci proponiamo di studiare un caso di ciclogenese stimando lo aumento di vorticità in un dato punto e confrontandolo con la situazione reale: vogliamo in altre parole calcolare la tendenza

$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t}$ per avere una previsione.

Si ha:
$$\frac{\partial \zeta_{850}}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_{700}}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_r}{\partial t}$$

$$(3') \quad \frac{\partial \zeta_r}{\partial t} = \frac{g}{f} \nabla^2 A_r + \ln \frac{850}{700} \left[(\Gamma_a - \Gamma) w + \frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt} \right]$$

dove abbiamo scelto come livello più basso la superficie isobara di 850mb e come quello più alto la quota di 700mb. Questa scelta tiene conto del fatto che a 850mb, corrispondente alla quota di circa 1500m, si può trascurare la forza di attrito viscoso che invece agisce pesantemente vicino al suolo; a 700

ma invece si può ritenere valida l'approssimazione:

$$\frac{\partial \zeta_{700}}{\partial t} = - \vec{V}_{700} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f)$$

Per calcolare la (3') terremo conto soltanto del primo termine a secondo membro, in quanto, oltre a presentare dei problemi di calcolo, sono trascurabili rispetto al primo, gli altri due termini; soprattutto tenendo conto del fatto che all'inizio di una ciclogenesi il termine di riscaldamento non-adiabatico è piccolo in quanto poiché ci sono poche nubi il rilascio di calore latente è trascurabile.

La situazione in esame è lo sviluppo ciclonico sottovento alle Alpi avvenuto nei giorni 24-25 / 1 / 1976, come in figura.

Esaminiamo termine a termine:

a) $\frac{\partial \zeta_{700}}{\partial t} = - \vec{V}_{700} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f)$. Per calcolarlo in differenze finite è necessario utilizzare la formula:

$$- \vec{V}_{700} \cdot \vec{\nabla} (\zeta + f) \approx - V \frac{(\zeta + f)_1 - (\zeta + f)_0}{L}$$

Come L è necessario utilizzare la lunghezza caratteristica di una perturbazione a scala sinottica, ed i due punti per i quali calcolare poi la differenza di vorticità vanno scelti uno nel luogo ove si calcola la tendenza e l'altro sopravvento al primo distante dal primo $L \approx 10^6$ m. Nel nostro caso il punto sopravvento è stato scelto vicino alle coste della Bretagna ed l'altro nella zona dove si formerà il ciclone. In ogni punto è ora necessario calcolare la vorticità assoluta. Per questo si fa l'ipotesi geostrofica $\zeta_g = \frac{g}{f} \nabla^2 z$. La vorticità viene così ad essere proporzionale al laplaciano della quota della super-

ficie isobarica. Poiché ∇^2 in differenze finite è:

$$\nabla^2 z \simeq \frac{z_N + z_S + z_E + z_W - 4z_0}{d}$$

è necessario stimare la z in cinque punti rispettivamente nel punto stesso (O), a Nord (N), a Sud (S), a Est (E), a Ovest (W) del centro. Si assume inoltre $d = 250 \text{ km}$. Nelle pagine seguenti è riportato un modulo campione per evidenziare la successione dei calcoli anche per i passaggi seguenti.

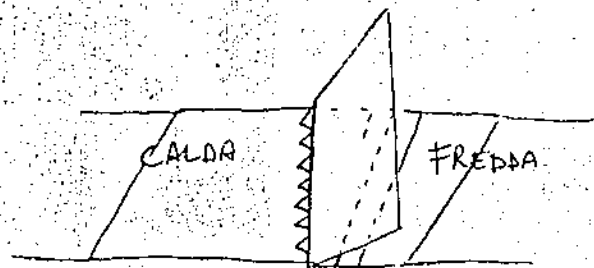
Ottenuta $\frac{\partial S_{100}}{\partial t}$ bisogna calcolare $\frac{\partial z_r}{\partial t} \simeq \frac{4}{\pi} \nabla^2 A_r$. Come si è già visto, per il calcolo del Laplaciano è necessario conoscere i valori del campo anche nell'intorno del punto. Nel nostro caso servono i valori dell'avvezione di spessore nell'intorno del punto Italia e Si calcolino perciò per ogni punto N, S, E, W, O le avvezioni di spessore dovute rispettivamente ai punti N, S, E, W, O del punto Manica, col metodo già adottato. Si presti attenzione tuttavia al fatto che, poiché vi sono le Alpi che agiscono come una barriera, è necessario porre la condizione che, nei punti che costituiscono l'intorno ^{del punto Italia} che sono situati più a ridosso delle Alpi, non ci sia avvezione di temperatura.

Viene svolto un esempio di calcolo. -

III. NOTA SUI FRONTI

Nel paragrafo precedente avevamo visto che una delle cause principali dell'aumento della vorticità (quindi della ciclogenesi) era il laplaciano, e quindi la geometria, dell'avvezione termica. Parliamo di "geometria" dell'avvezione termica perché avevamo visto come il laplaciano sia proporzionale alla "forma", più che al valore assoluto del campo (in questo caso del campo dell'avvezione di temperatura).

Dall'osservazione si nota che le depressioni, i cicloni si formano nell'emisfero Nord alla latitudine dell'Islanda e soprattutto vicino a quest'ultima isola ed alla Groenlandia. Qualitativamente (una trattazione quantitativa è al di fuori dello scopo di questi appunti) ciò si può spiegare con la seguente osservazione: alla latitudine dell'Islanda il gradiente termico orizzontale è molto elevato (le isoterme sono molto fitte) e basta quindi una piccola variazione del campo del vento a provocare, qui più che altrove, un'ondulazione del campo di T ; e sappiamo che questo equivarrebbe a variare i valori del laplaciano dell'avvezione di temperatura. Si può visualizzare la situazione nel modo seguente: si può pensare ad una massa d'aria calda e ad una di aria fredda a contatto, come in figura:

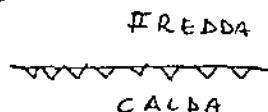


This is a detailed meteorological map of the North Atlantic and surrounding regions, including parts of North America, Europe, and Africa. The map displays various weather systems and data points:

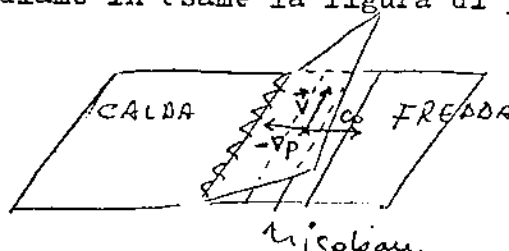
- Pressure Systems:** Several high (H) and low (L) pressure systems are marked. A prominent low-pressure system is located in the central North Atlantic, with values ranging from 100 to 104. Other high-pressure systems are visible in the North Atlantic and over Europe.
- Isobars:** Contour lines representing constant pressure are drawn across the map, with values such as 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140, 142, 144, 146, 148, 150, 152, 154, 156, 158, 160, 162, 164, 166, 168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 190, 192, 194, 196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216, 218, 220, 222, 224, 226, 228, 230, 232, 234, 236, 238, 240, 242, 244, 246, 248, 250, 252, 254, 256, 258, 260, 262, 264, 266, 268, 270, 272, 274, 276, 278, 280, 282, 284, 286, 288, 290, 292, 294, 296, 298, 300.
- Isotherms:** Contour lines representing constant temperature are also shown, with values ranging from -10 to 30 degrees Celsius.
- Weather Symbols:** Various symbols are used to indicate weather conditions, including clouds, rain, and snow.
- Geographical Features:** The map includes outlines of continents and major bodies of water, such as the North Atlantic, the Gulf of Mexico, and the Mediterranean Sea.

298

immaginiamo la superficie di separazione delle due masse di aria inclinata rispetto alla verticale (vedremo che sulla Terra la superficie di discontinuità non può essere verticale). Chiamiamo fronte l'intersezione del piano di discontinuità con il piano orizzontale; nelle carte al suolo esso sarà rappresentato come in figura:



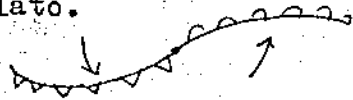
Riprendiamo in esame la figura di pag. precedente:



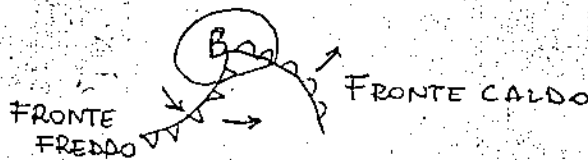
Abbiamo tracciato delle isobare che indicano che la pressione aumenta verso l'aria fredda: è intuibile che la pressione aumenta quando l'aria sovrastante diventa sempre più pesante. Poiché la forza del gradiente di pressione è diretta verso l'aria calda, in assenza di forza di Coriolis la superficie di discontinuità tenderebbe a portarsi in posizione verticale; nell'atmosfera terrestre questo comunque non avviene e la situazione, in equilibrio geostrofico, tende a rimanere stabile, con la direzione di $\vec{V}$ parallela al fronte.

La situazione sopra descritta è la situazione di fronte stazionario; basta tuttavia una fluttuazione nel vento perché il fronte si ondui: questo può provocare un'aumento del Laplaciano dell'avvezione termica che è un fattore molto impor-

tante nella formazione di una depressione; il fronte stazionario diventa fronte ondulato.

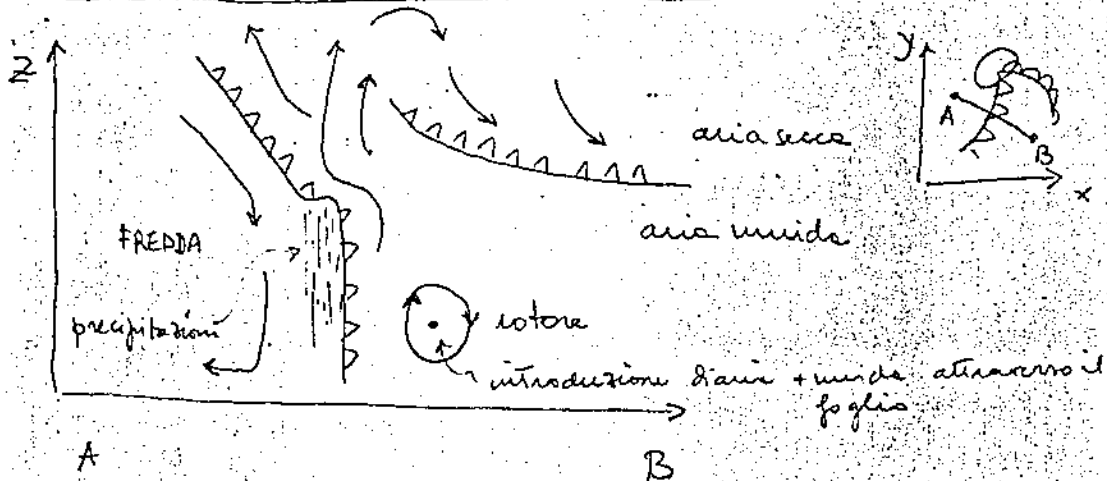


La circolazione rotatoria innescata dalla piccola perturbazione nel campo del vento è incrementata dal ∇^2 dell'avvezione termica.



In figura è mostrata la situazione finale della formazione del minimo di bassa pressione. Implicitamente abbiamo già individuato due tipi di fronti: il fronte freddo in cui la dinamica è tale da far sì che l'aria fredda tenda ad "incunearsi" sotto la massa d'aria calda; ed il fronte caldo in cui l'aria fredda è "passiva" e quella calda si inerpica. Da notare tuttavia che questa è un'idealizzazione molto spinta.

SEZIONE PIÙ DETTAGLIATA DI UN FRONTE FREDDO



$$u = \frac{e}{E(t)}$$

$$x = \frac{m_v}{m_A} = D \cdot \frac{e}{p}$$

$$\alpha = \frac{m_v}{V} = \rho_v = \frac{e}{R_v T}$$

Umidità relativa

Rapporto mescolanza

Umidità assoluta

Temperatura di rugiada

Temperatura di bulbo bagnato

di appannatura di uno specchio raffreddato

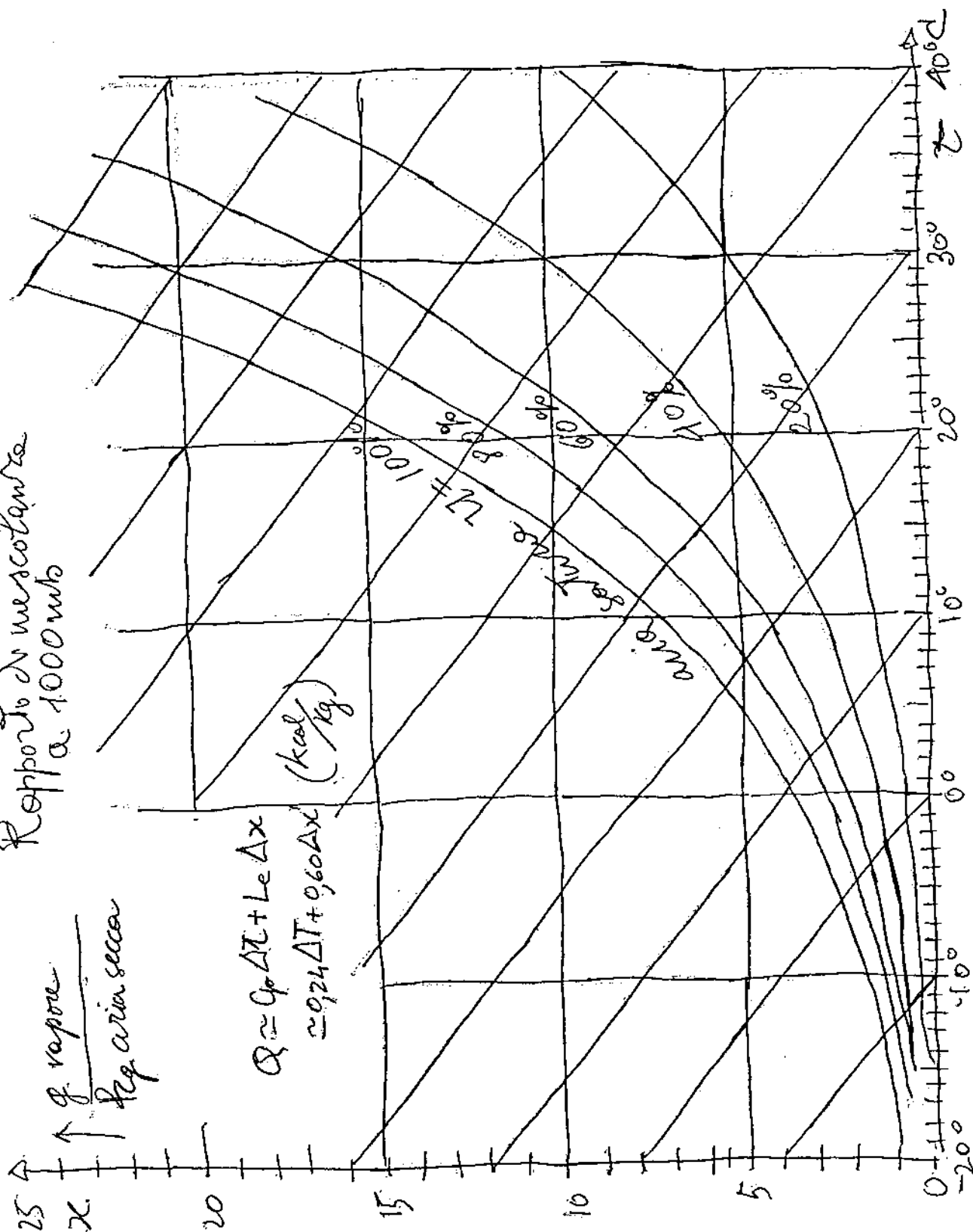
Temperatura di termometro con bulbo rivestito di garza bagnata e ventilato.

Rapporto di mescolanza
a 1000 mb

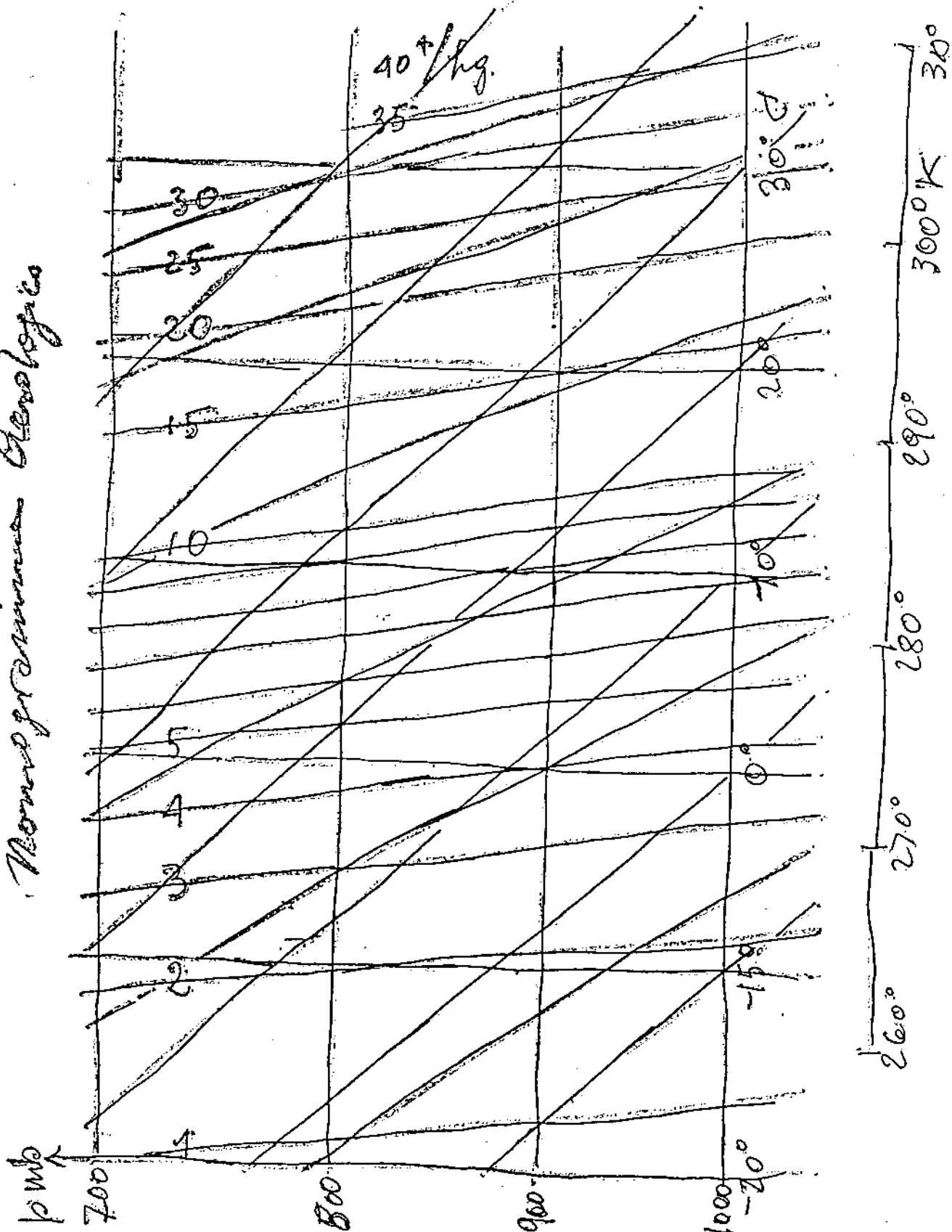
$\uparrow$ $\frac{q_{\text{vapore}}}{q_{\text{aria secca}}}$

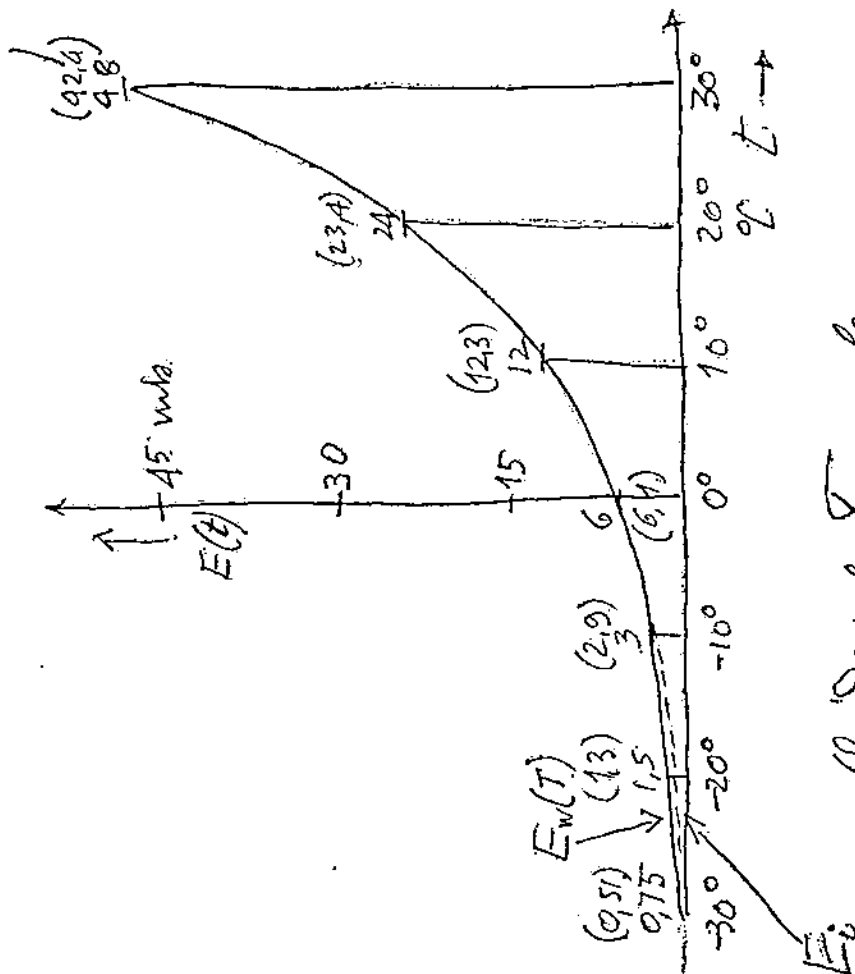
$$Q \approx q_p \Delta T + L_e \Delta x$$

$$\approx 0.24 \Delta T + 0.60 \Delta x \quad (\text{kcal/kg})$$



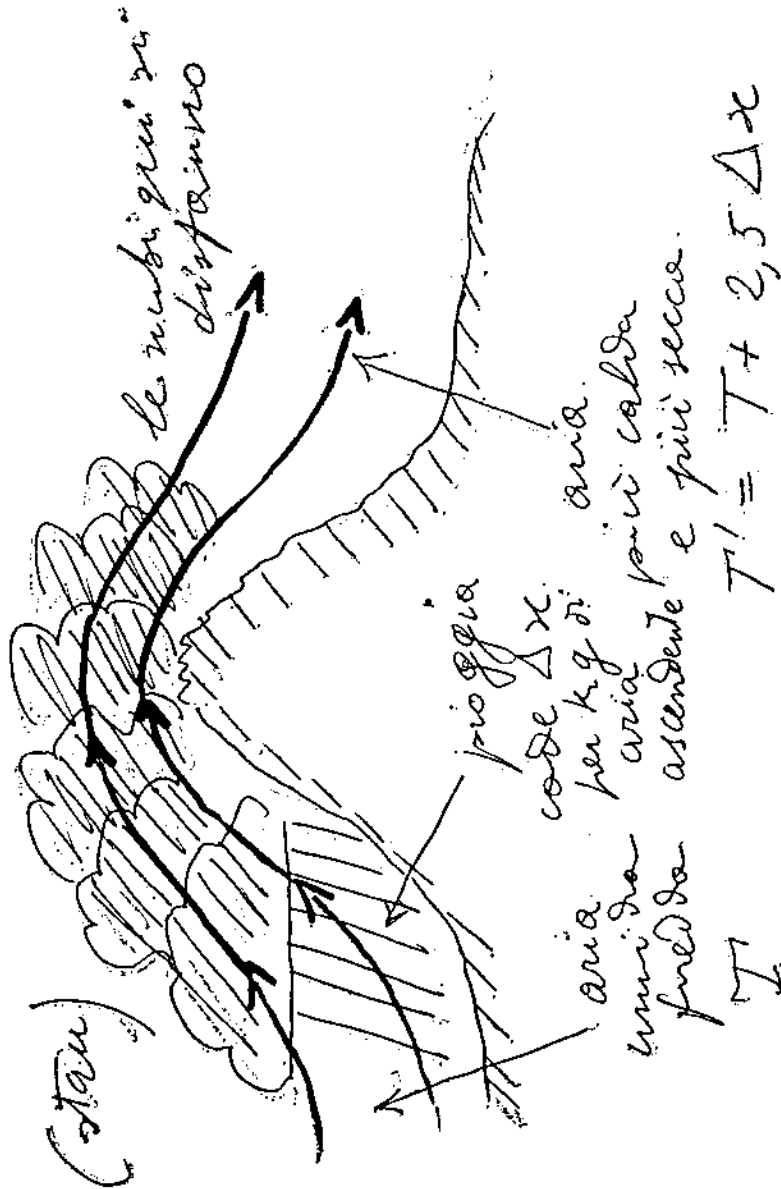
Normal pressure thermodynamics

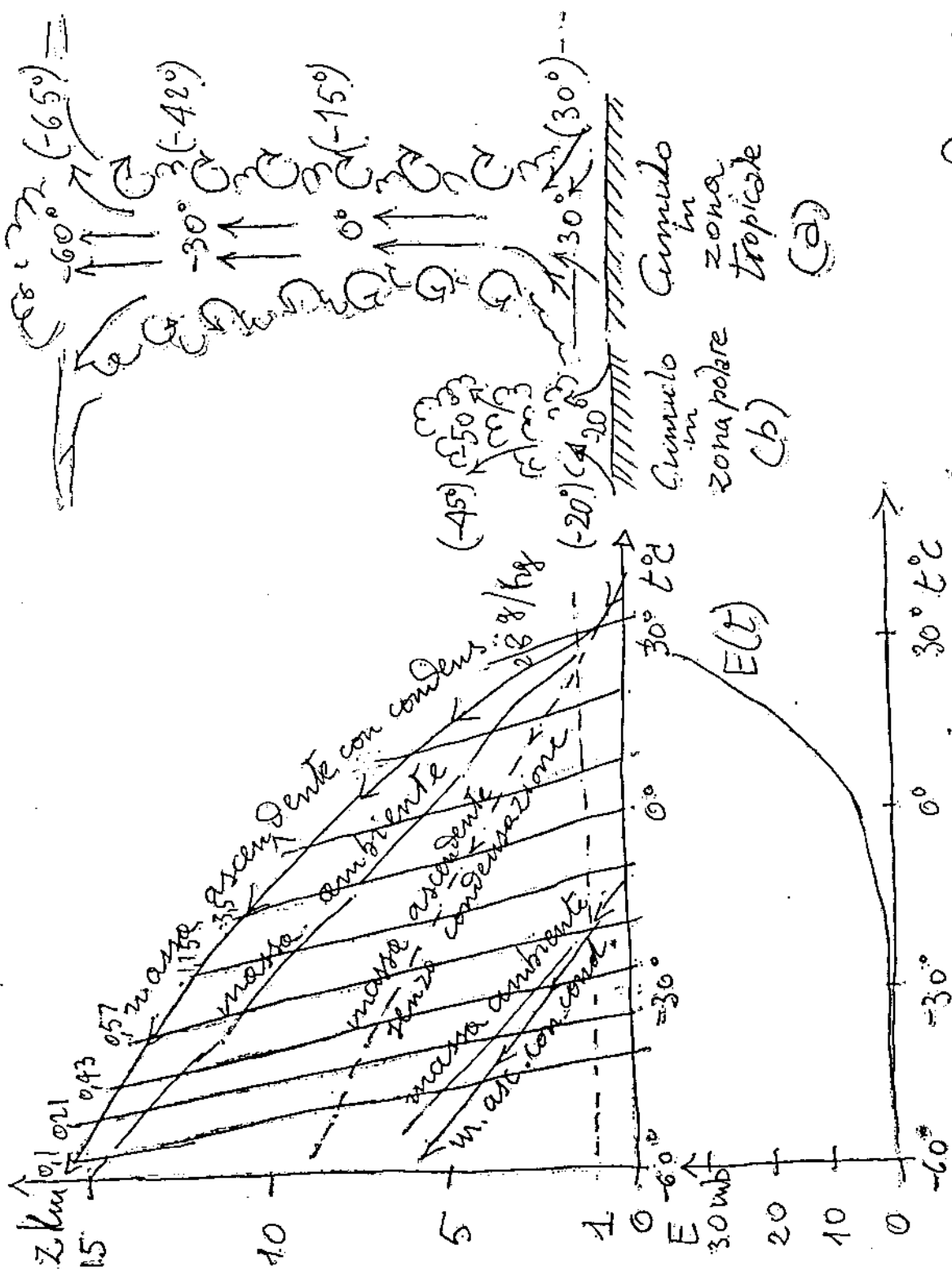




Andamento con la
Temperatura
della pressione di vapore
satura

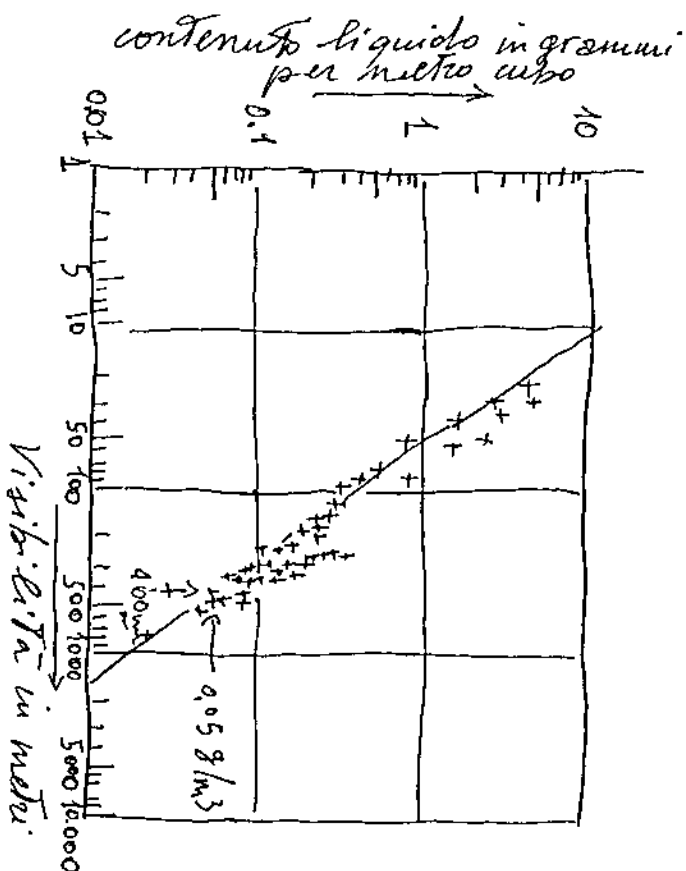
muta' per sollevamento forzato orografico

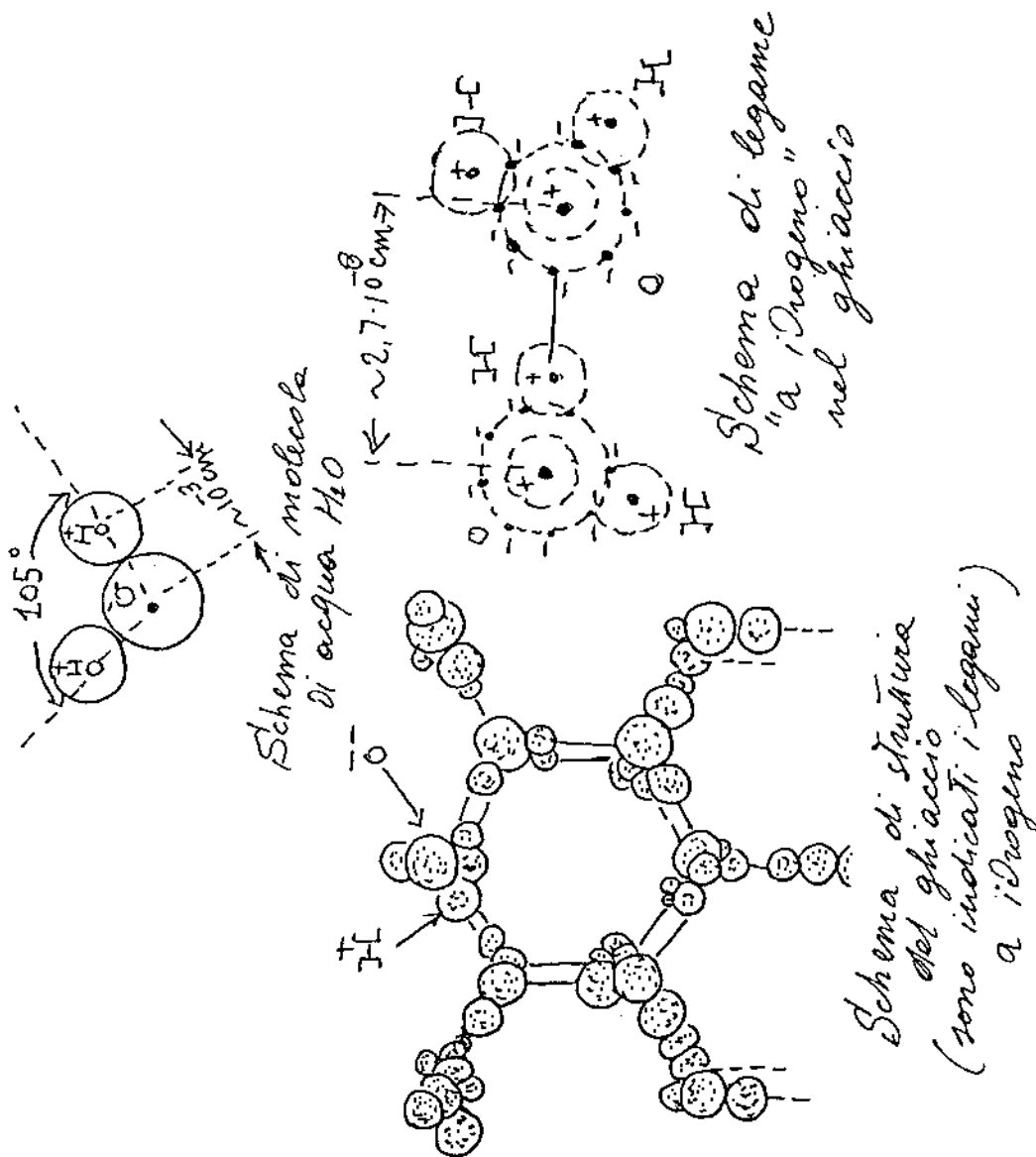


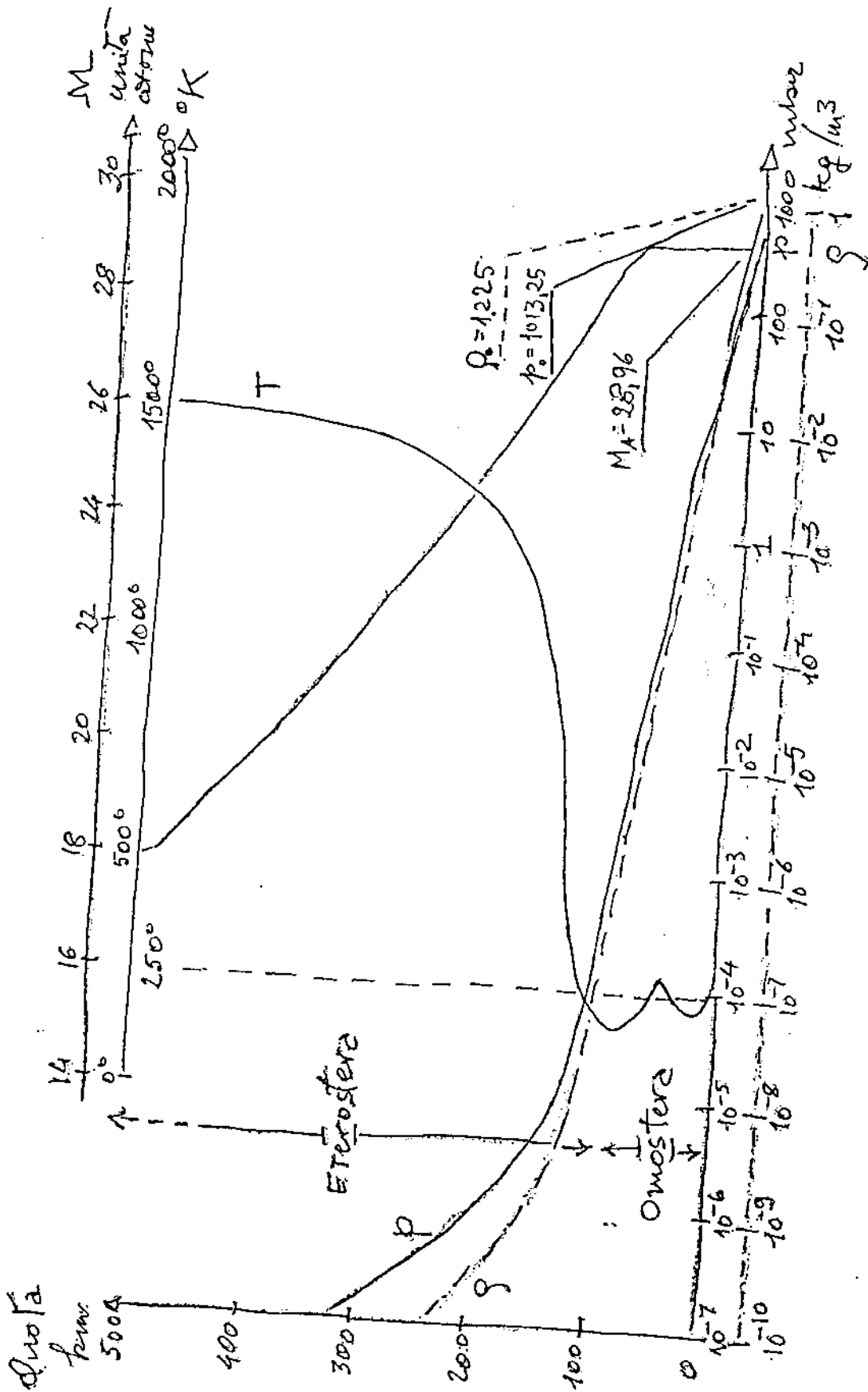


Massa d'aria satura in eccesso con condensazione all'equatore (a) e in zona polare (b)

Grafico di Radford
 Relazione fra contenuto liquido
 della nebbia e visibilità

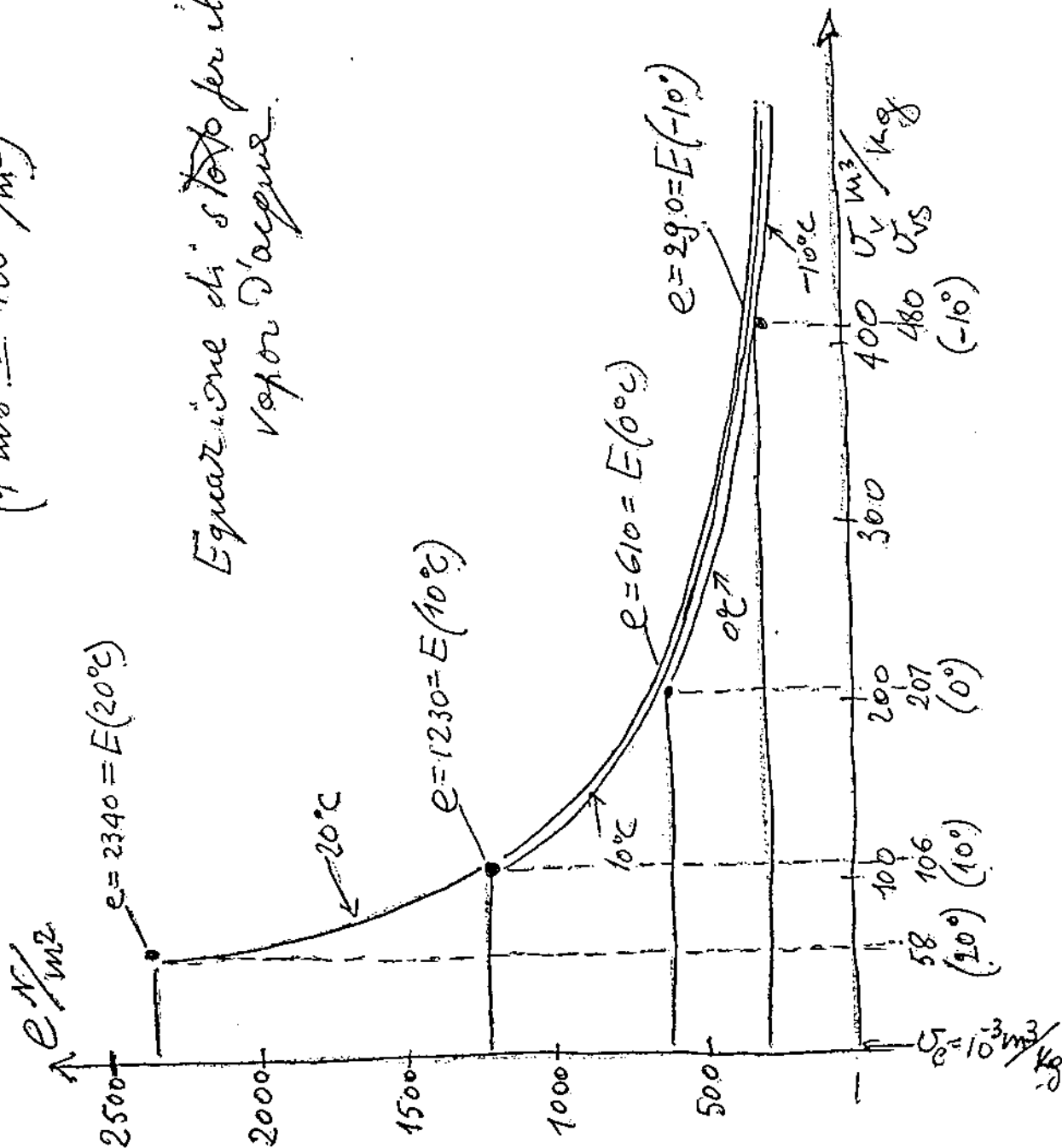


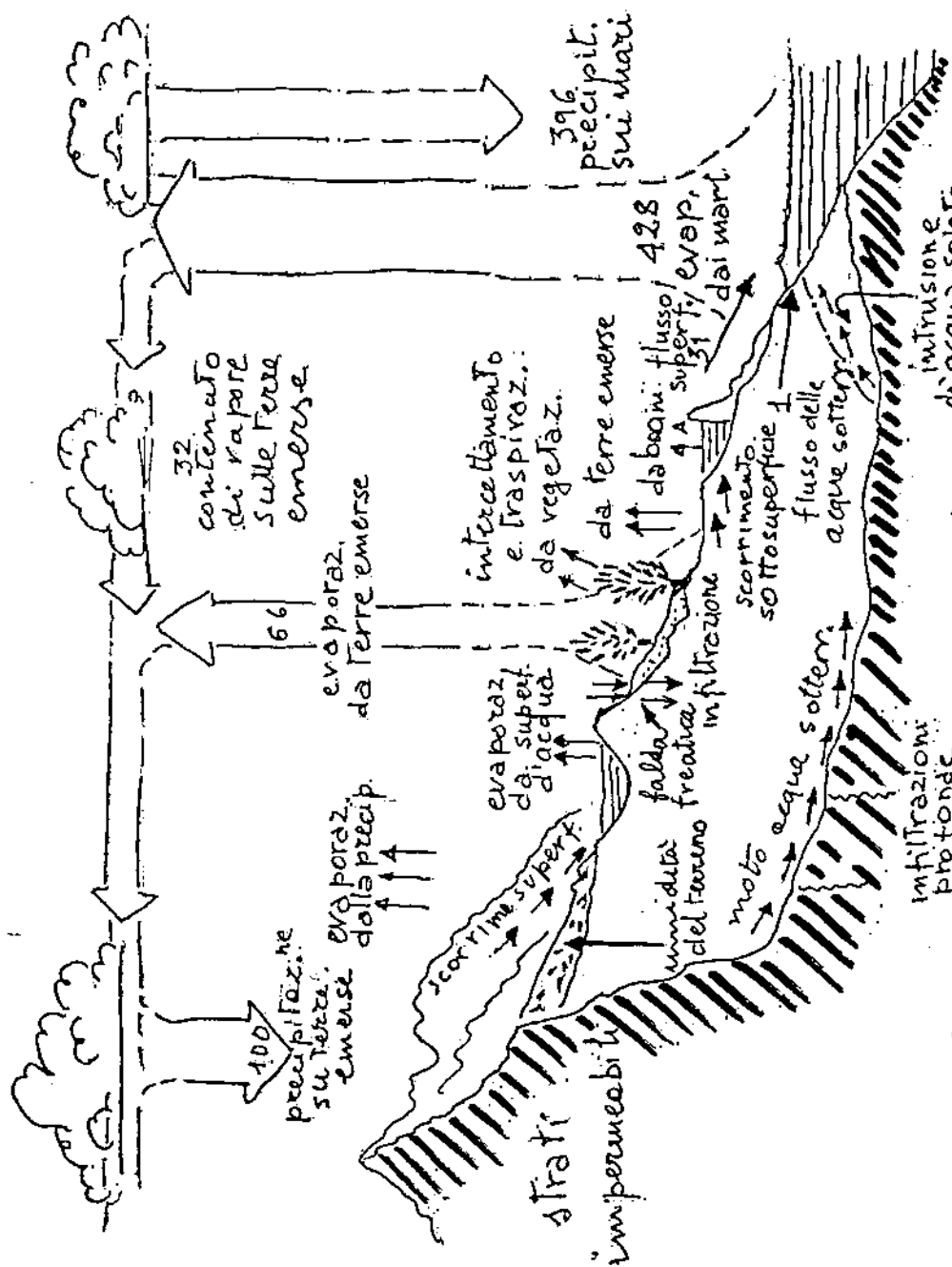




$$(1 \text{ mb} \approx 100 \text{ N/m}^2)$$

Equazione di stato per il
Vapore d'acqua.

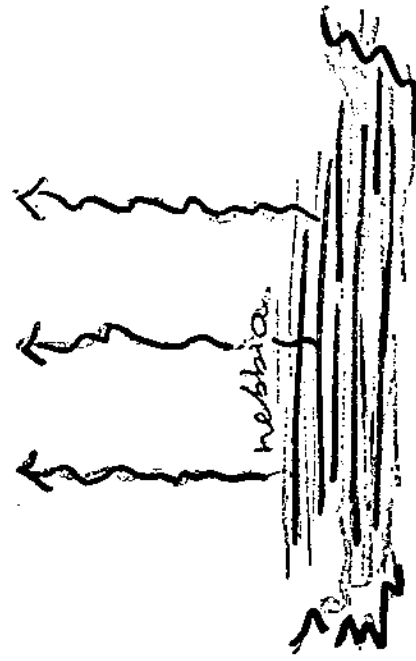




Schema del ciclo idrologico, bilancio medio annuale in unità relative (da V.T. CHLOV, Enc. del. 900)

notte con

Cielo
sereno)



raffreddamento
per

radiazione
notturna

nebbia vento leggero



terreno
freddo mare
caldo

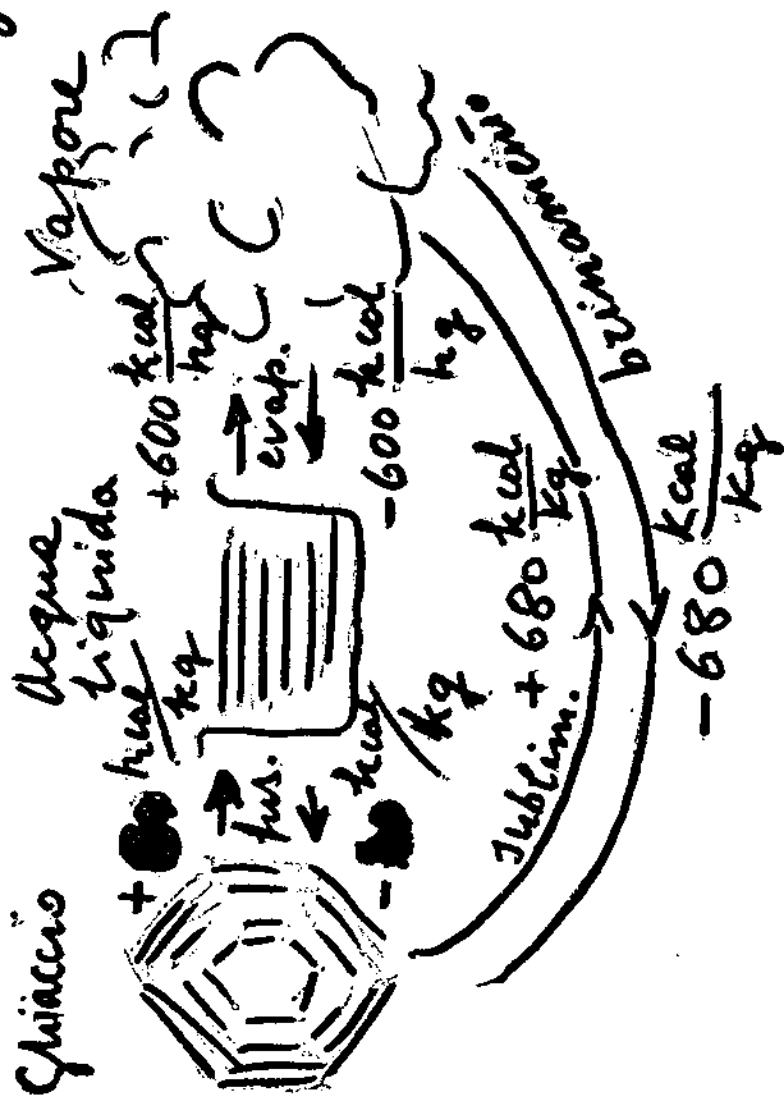
nebbia per ref.

raffreddamento

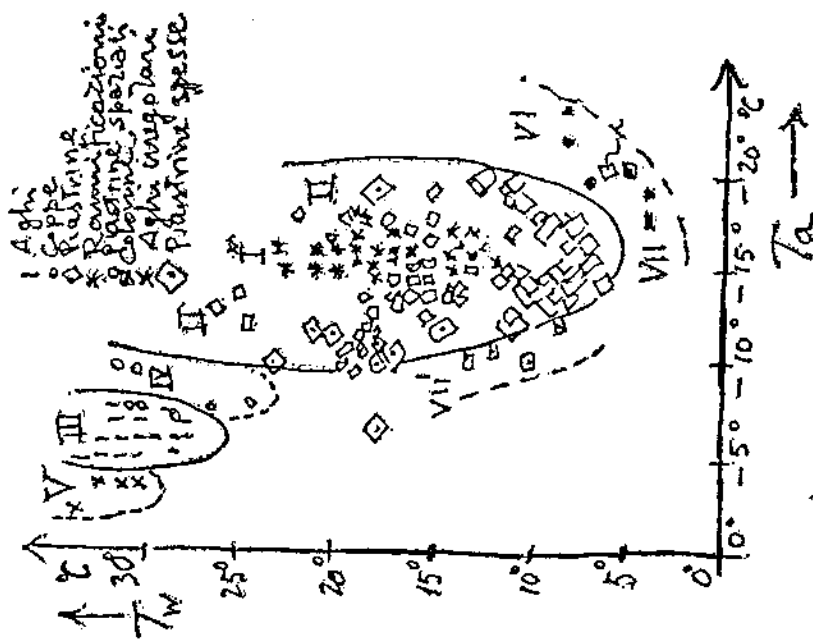
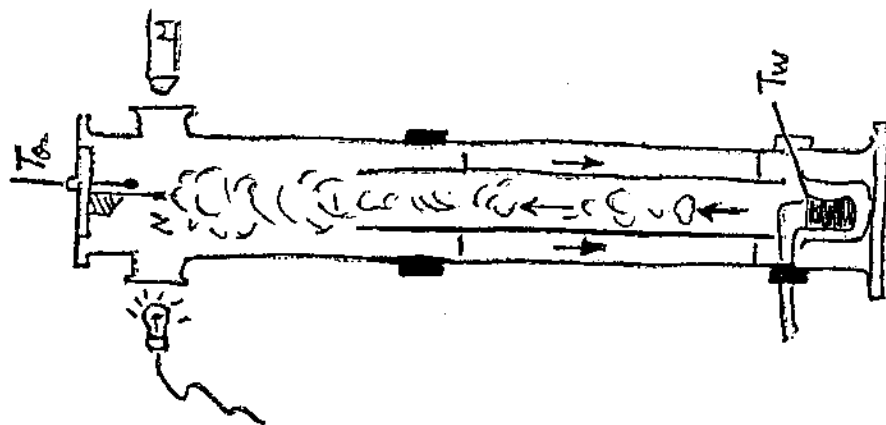
Formazione

della nebbia

Acque:
 Cambiamenti di stato e
 calori latenti di trasf.



Esperimenti di Nakaya e suoi risultati



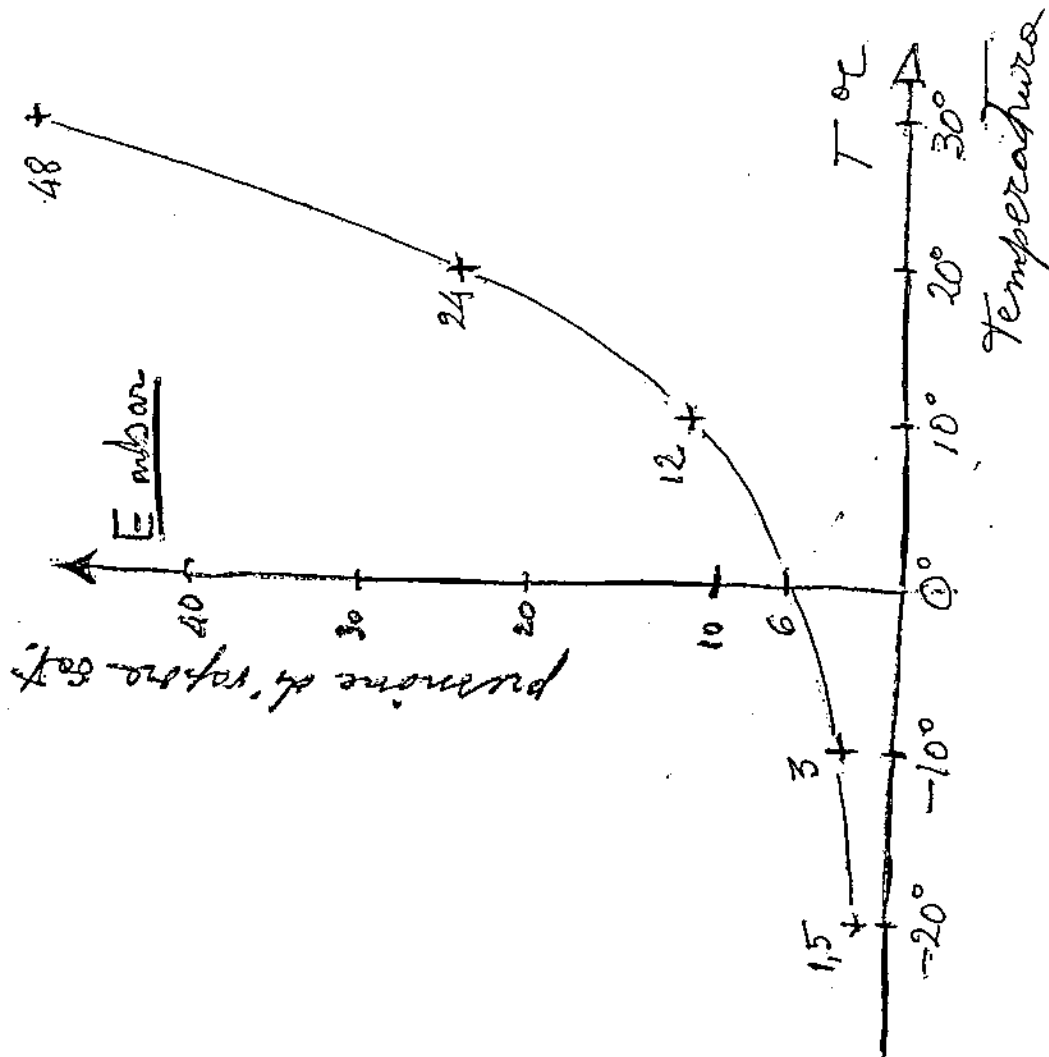
alla pressione di
 1000 mb
 un Kg di aria
 saturata contiene

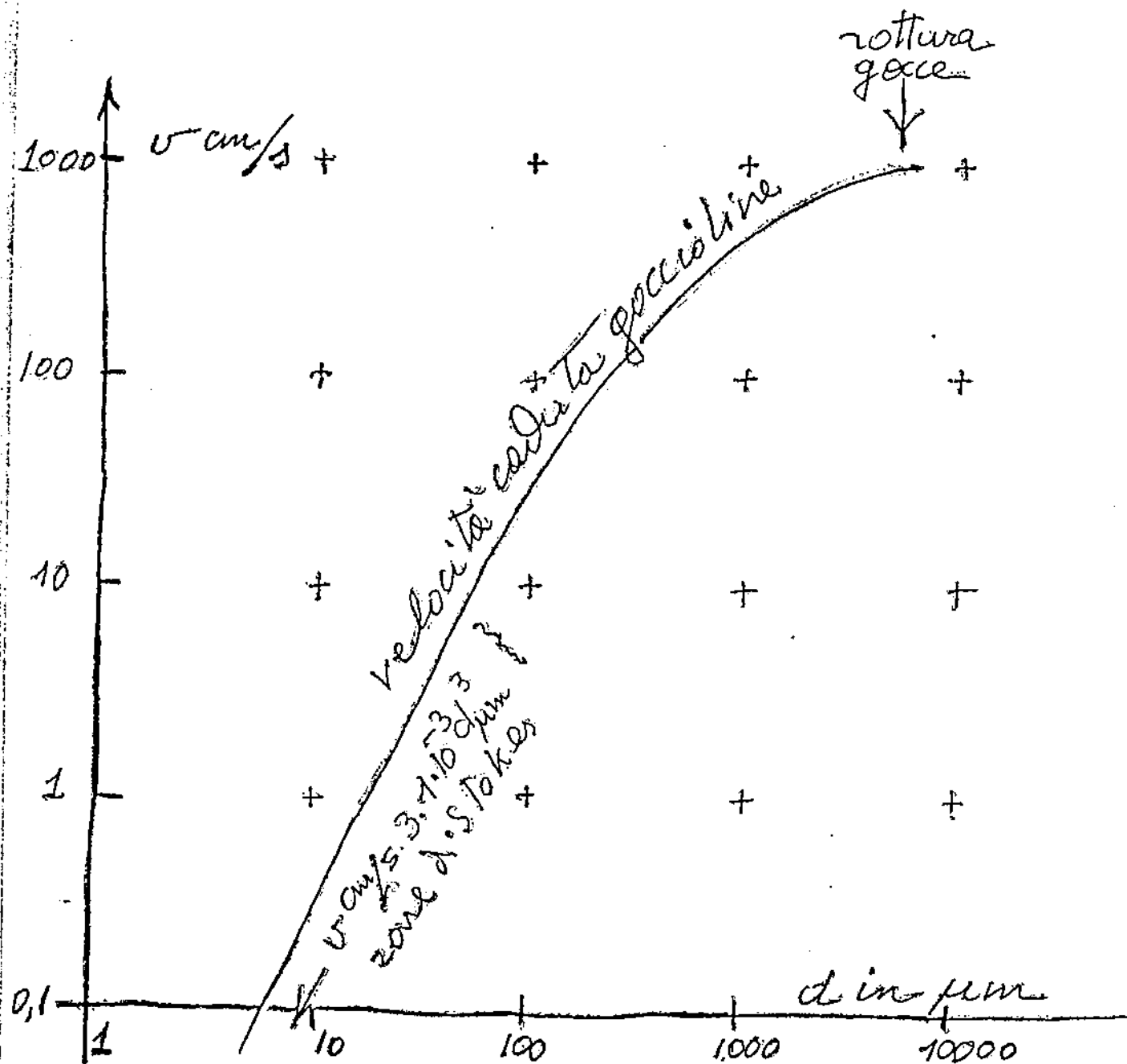
5 g di vapore a 5°C

10 " " " a 15°

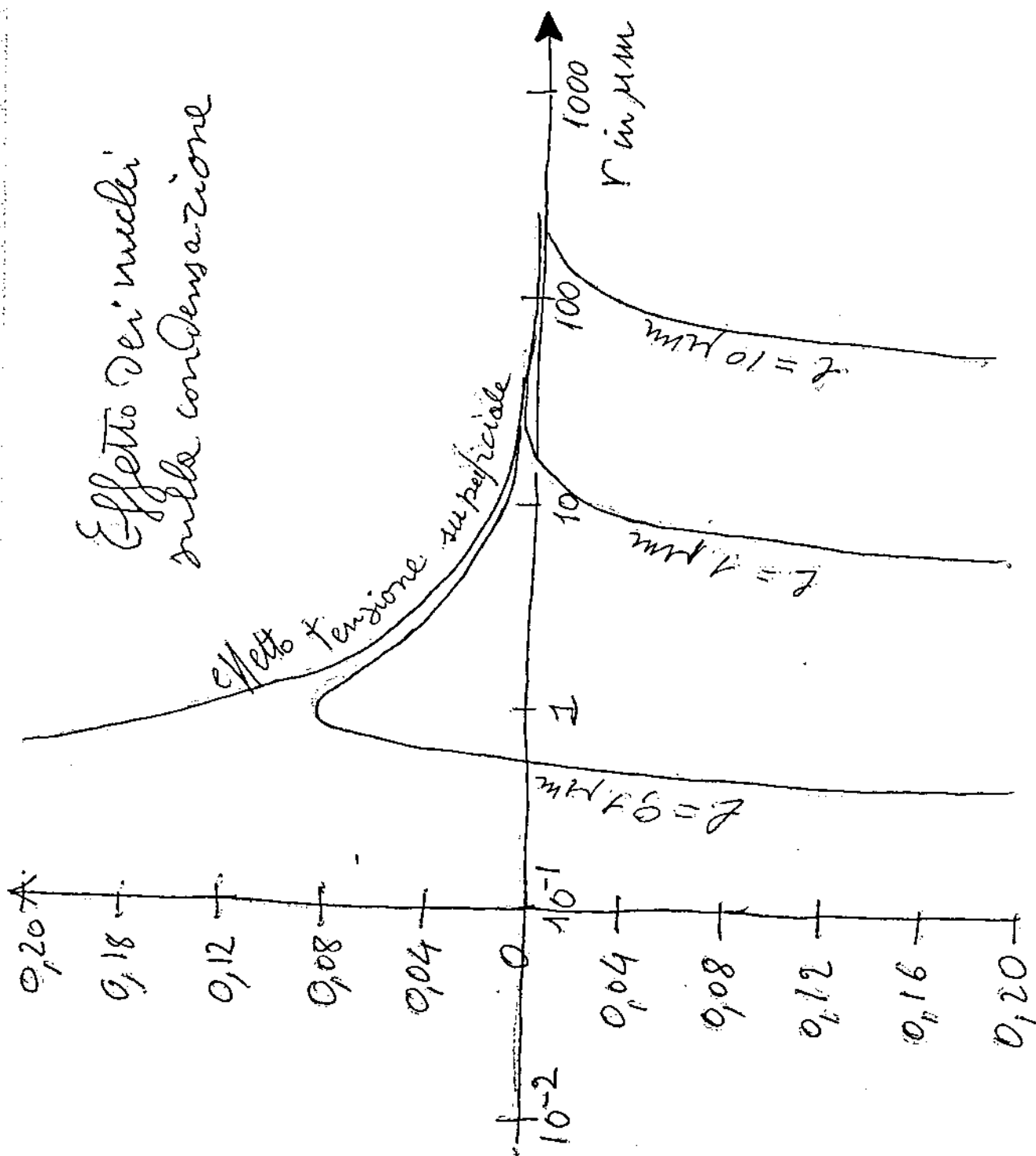
20 " " " a 25°

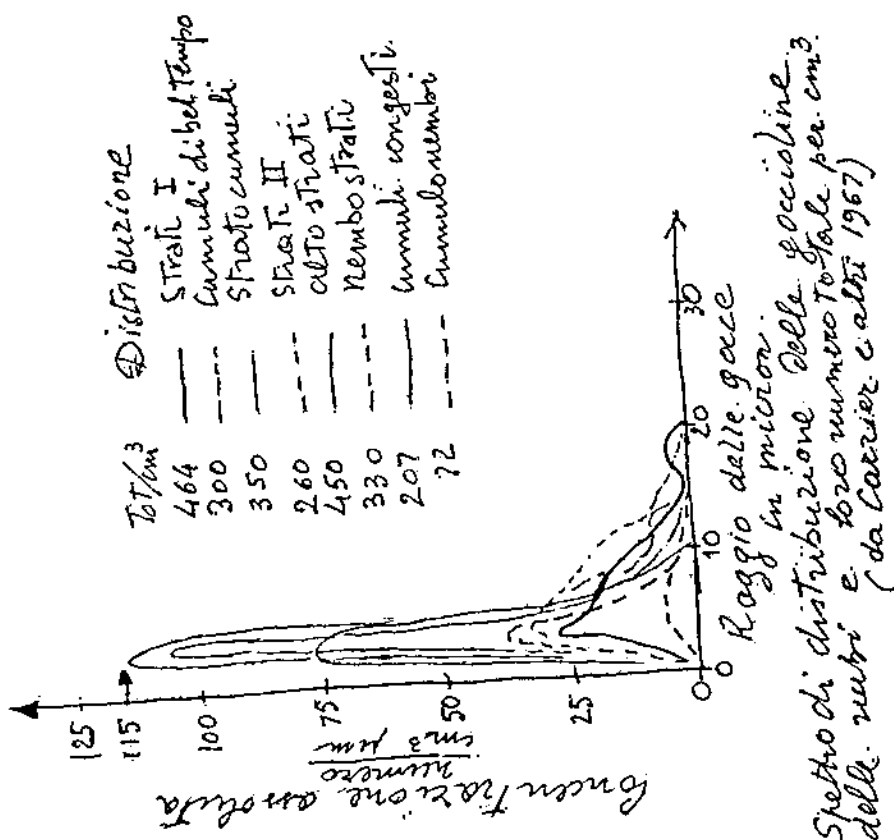
30 " " " a 35°

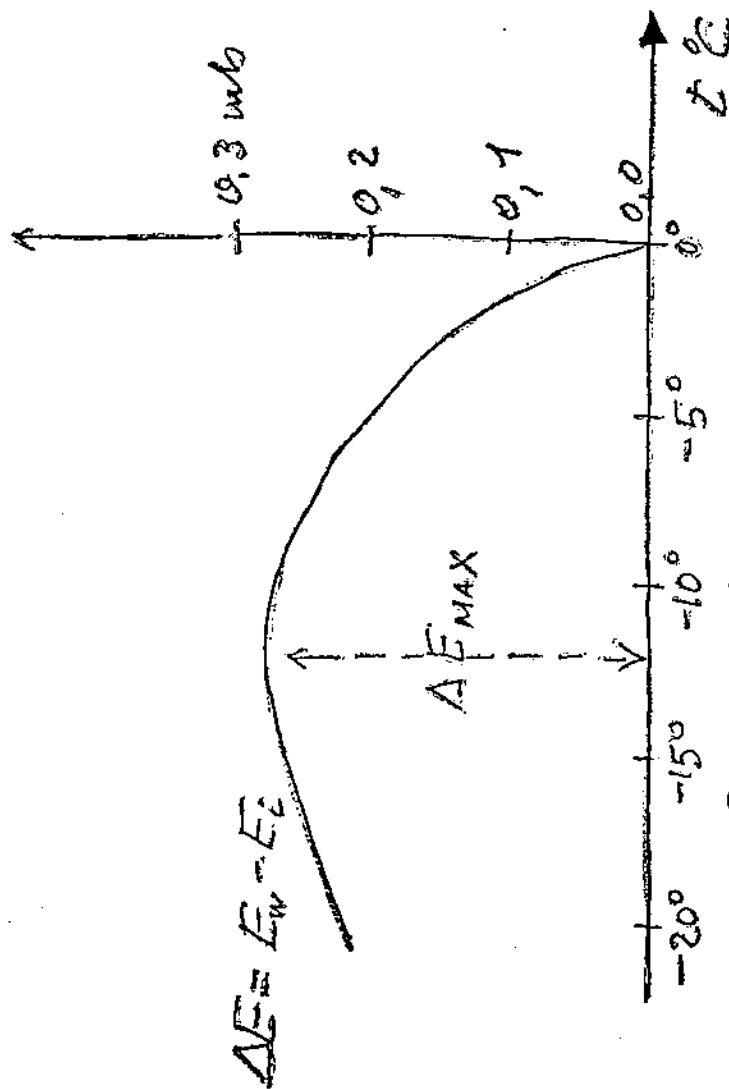




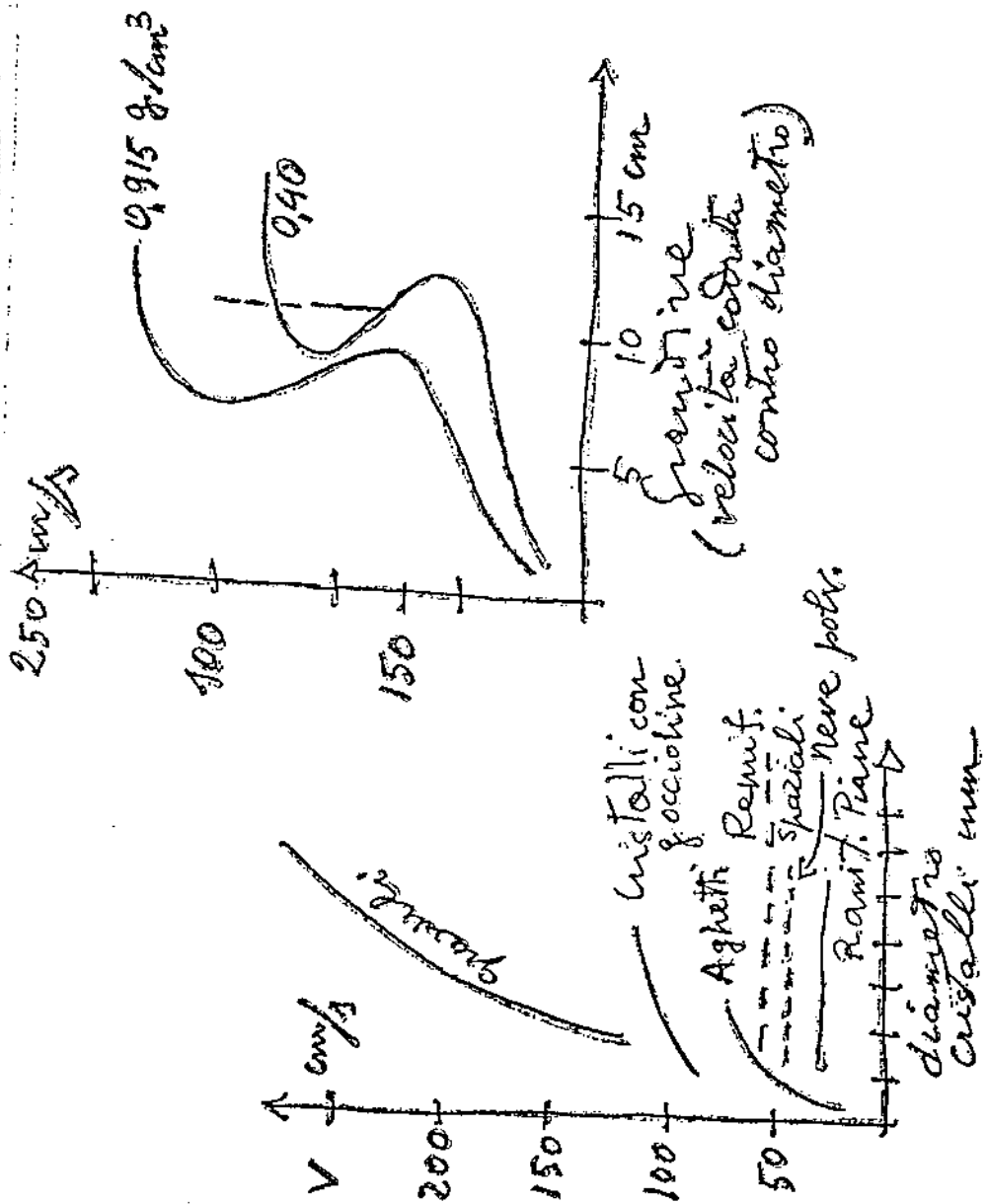
Effetto dei nuclei
nella condensazione

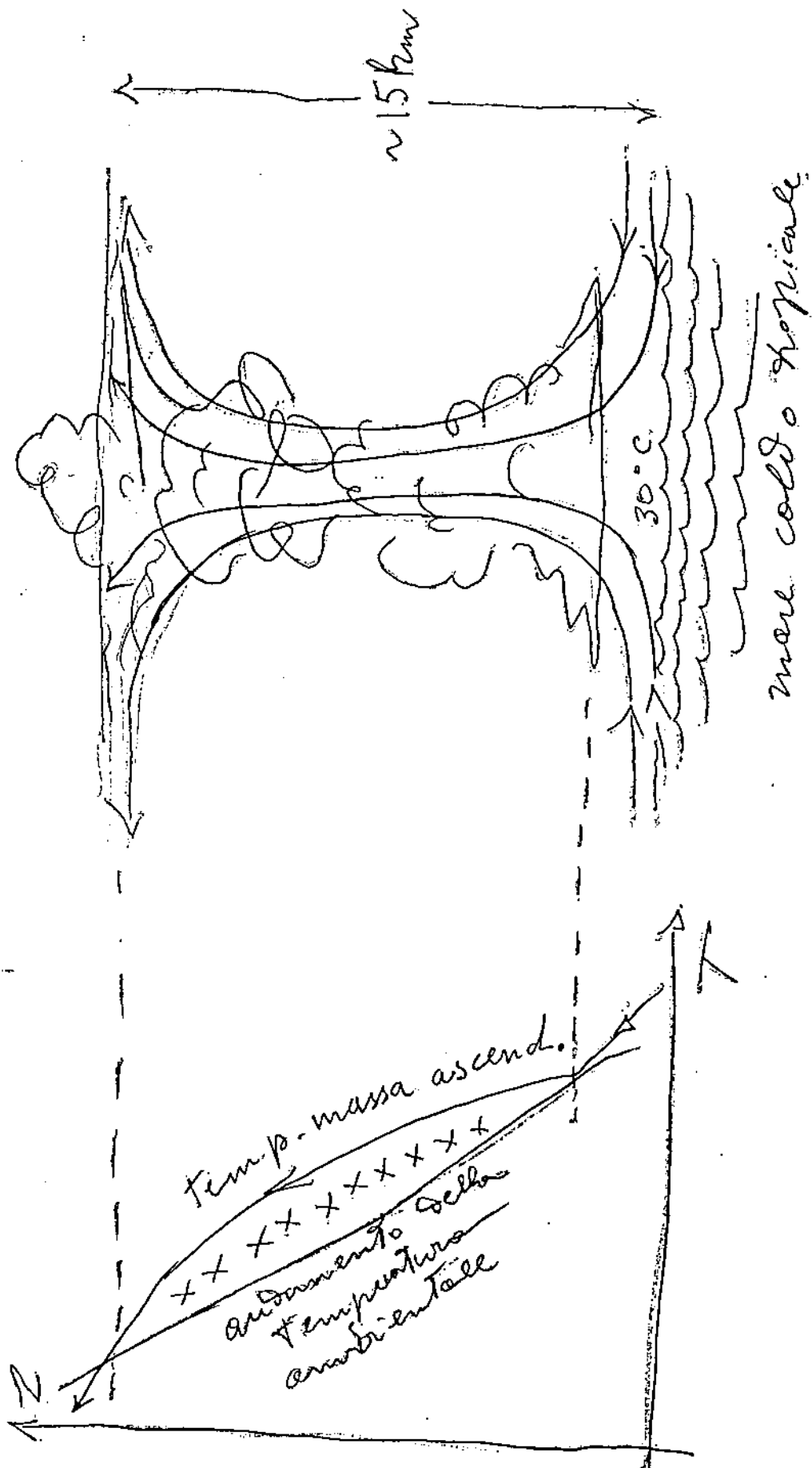


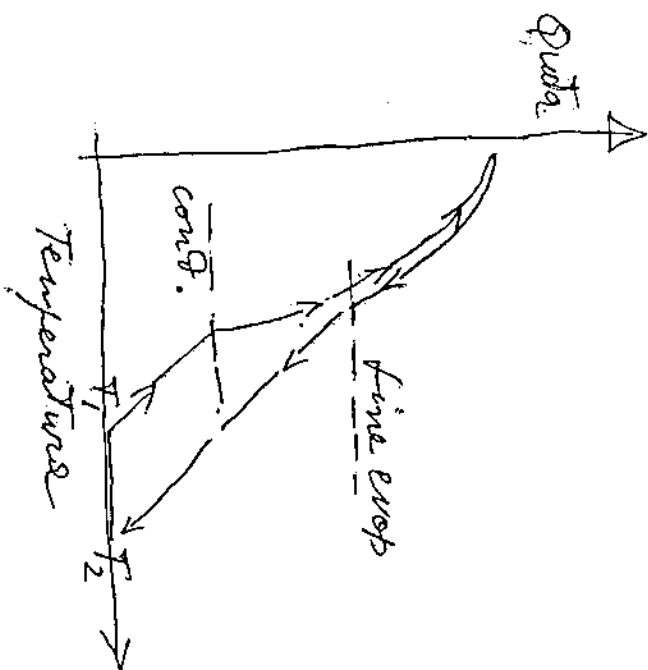
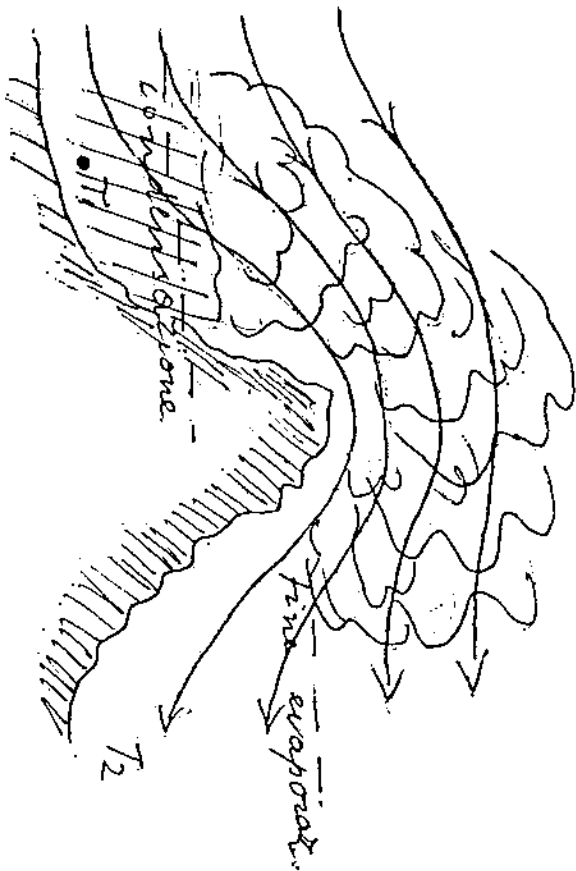




Andamento con T della
 differenza fra pressione di vapore
 saturo rispetto all'acqua e saturo rispetto
 al ghiaccio







$$T_2 \approx T_1 + 2,5 \Delta x$$

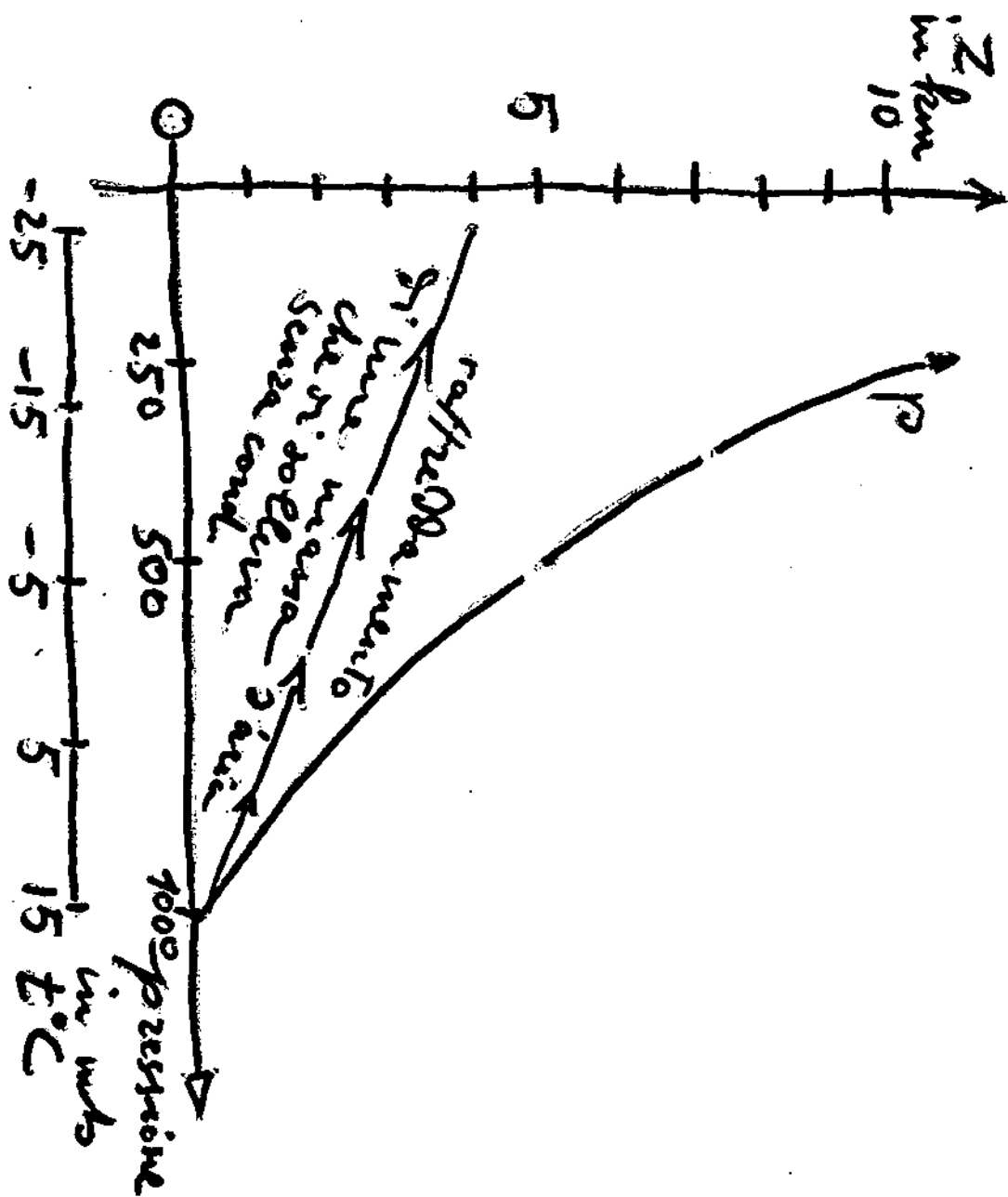
Effetto orografico con

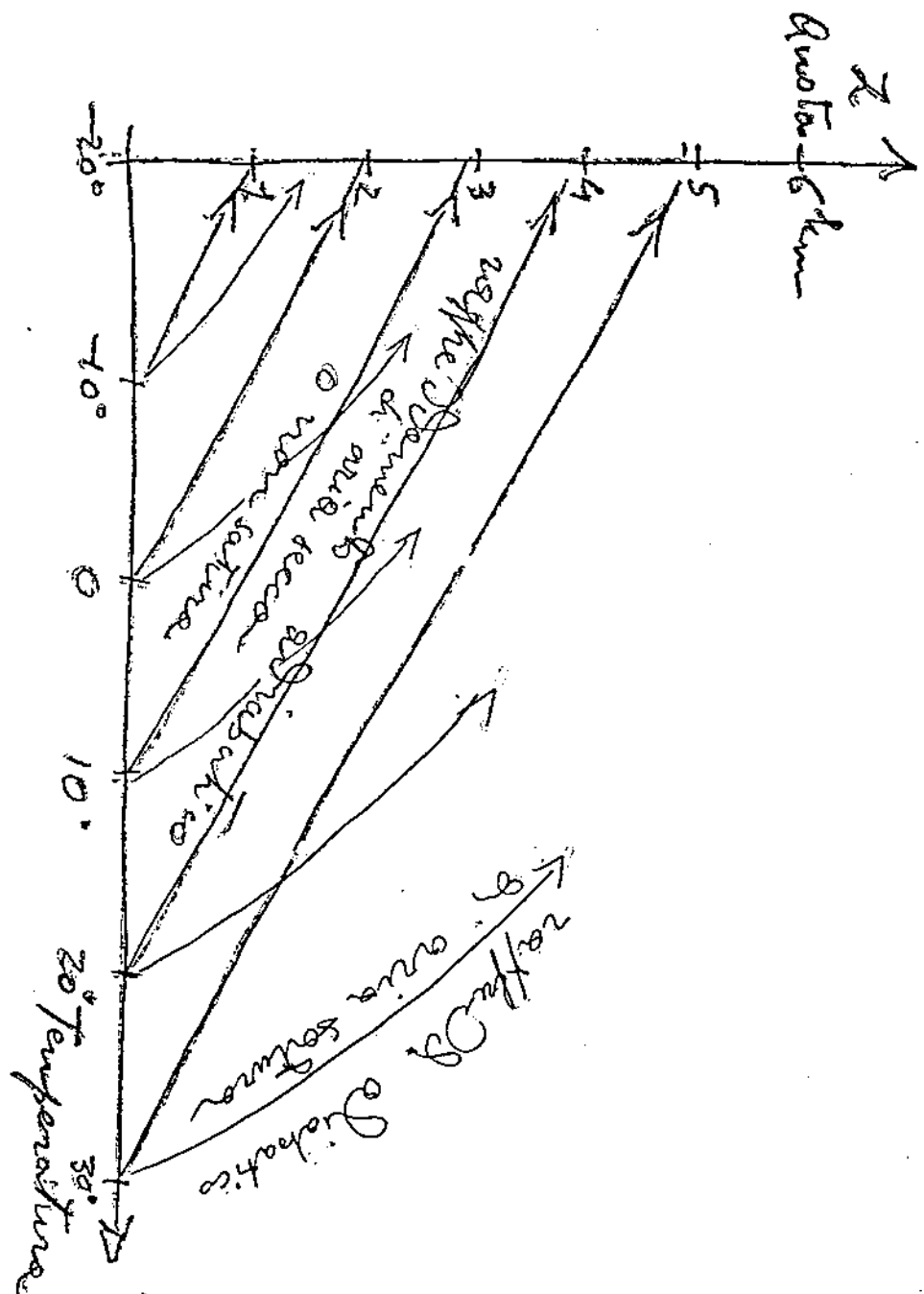
precipitazioni sopra vento

e aria più calda, trasparente

e secca sottovento

(Δx vapore perduto per
condensazione da
ogni kg d'aria)





24/1/1976

8 bis

$$\frac{\partial \zeta_{700}}{\partial t} = -\vec{V}_{700} \cdot \nabla (3+f)$$

	Z_N	Z_S	Z_E	Z_W	Z_0	$Z_N + Z_S + Z_E + Z_W - 4Z_0 \equiv d^2 \nabla^2 Z$
PUNTO ITALIA	2880	2980	2920	2950	2930	+10
PUNTO MANICA	2880	2980	2880	2980	2920	+40

	g	f	g/f	$d^2 \nabla^2$	d	$\frac{g}{f A^2}$	$\frac{g}{f} \nabla^2 Z$	$\frac{g}{f} \nabla^2 Z + f (s.c^{-1})$
PUNTO ITALIA	9,8	$1,031 \times 10^{-4}$	95053	+10	$2,5 \times 10^5 m$	$1,52 \times 10^{-6}$	$1,52 \times 10^{-5}$	$11,83 \times 10^{-5}$
PUNTO MANICA	9,8	$1,117 \times 10^{-4}$	87735	+40	$2,5 \times 10^5 m$	$1,40 \times 10^{-6}$	$5,62 \times 10^{-5}$	$16,79 \times 10^{-5}$

$$V = 40 kt = 20 m sec^{-1}$$

$$-\vec{V} \cdot \nabla (3+f) \approx -20 \frac{(11,83 - 16,79) \times 10^{-5}}{10^6} = 99,2 \times 10^{-11} sec^{-2}$$

$$\frac{\partial \zeta_T}{\partial t} \approx \frac{g}{f} \nabla^2 A_T$$

	Z_N^{700}	Z_S^{700}	Z_E^{700}	Z_W^{700}	Z_0^{700}	Z_N^{850}	Z_S^{850}	Z_E^{850}	Z_W^{850}	Z_0^{850}
PUNTO ITALIA	2880	2980	2920	2950	2930	1370	1420	1380	1420	1390
PUNTO MANICA	2880	2980	2880	2980	2920	1400	1480	1400	1480	1430

	$Z_N^{700} - Z_N^{850} \equiv (\Delta h)_N$	$(\Delta h)_S$	$(\Delta h)_E$	$(\Delta h)_W$	$(\Delta h)_0$
PUNTO ITALIA	$2880 - 1370 = 1510$	1560	1540	1530	1540
PUNTO MANICA	$2880 - 1400 = 1480$	1500	1480	1500	1490

86

$$[-\vec{V} \cdot \nabla(\Delta h)]_N \approx -15 \frac{(1510-1480)}{10^6} = -45 \times 10^{-5}$$

$$[-\vec{V} \cdot \nabla(\Delta h)]_S \approx -15 \frac{1560-1500}{10^6} = -90 \times 10^{-5}$$

$$[-\vec{V} \cdot \nabla(\Delta h)]_E \approx 0$$

$$[-\vec{V} \cdot \nabla(\Delta h)]_W \approx -15 \frac{1530-1500}{10^6} = -45 \times 10^{-5}$$

$$[-\vec{V} \cdot \nabla(\Delta h)]_O = 0$$

$$\nabla^2 A_T \approx \frac{10^{-5}[-45-90-45-4(0)]}{6,25 \times 10^{10}} = -28,8 \times 10^{-15}$$

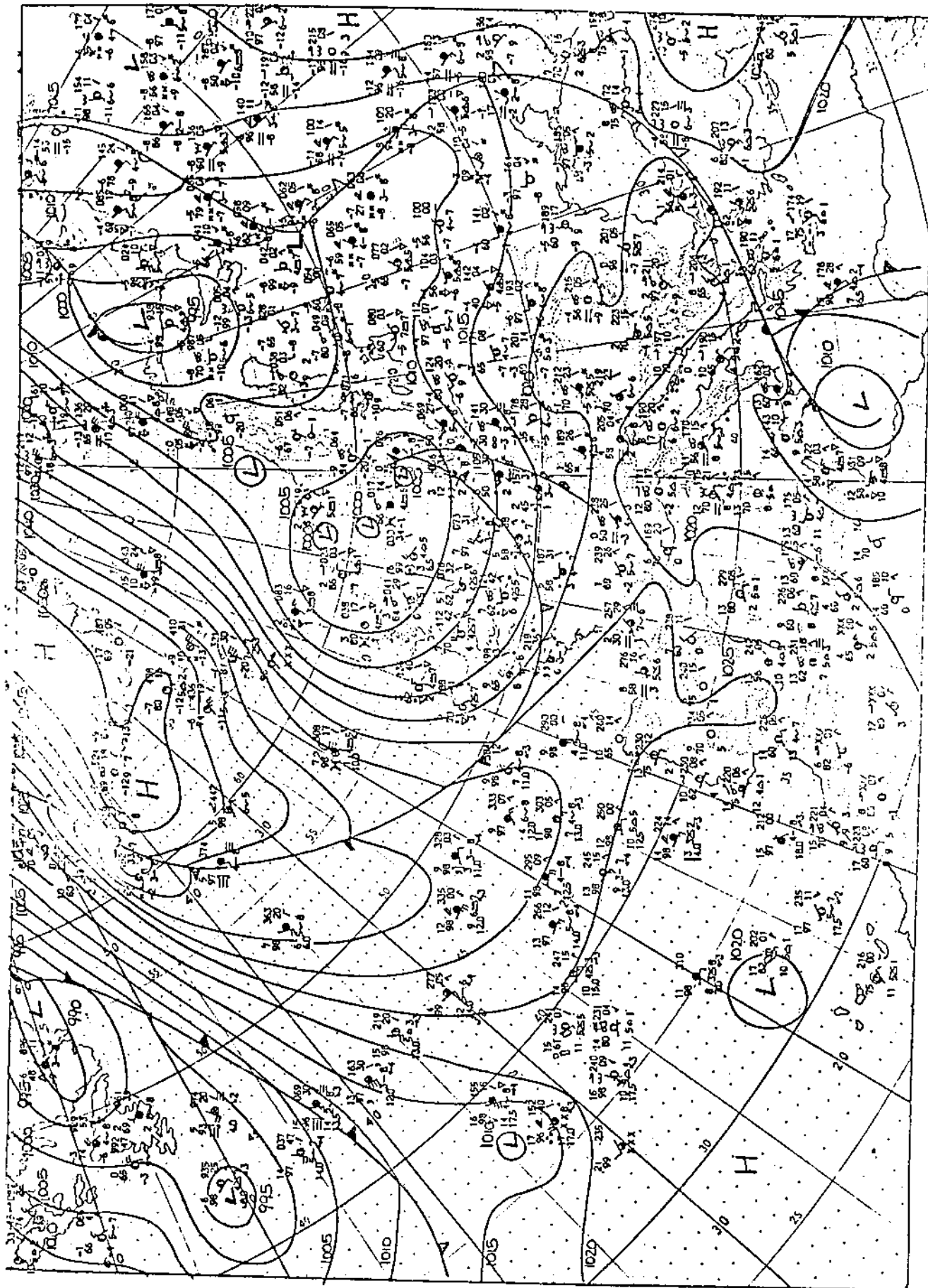
$$\frac{g}{f} \nabla^2 A_T = 95053[-28,8 \times 10^{-15}] = -273,75 \times 10^{-11}$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_{100}}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial t} \approx 99,2 \times 10^{-11} + 273,7 \times 10^{-11} = 372,9 \times 10^{-11} \text{ sec}^{-2}$$

25/1/76

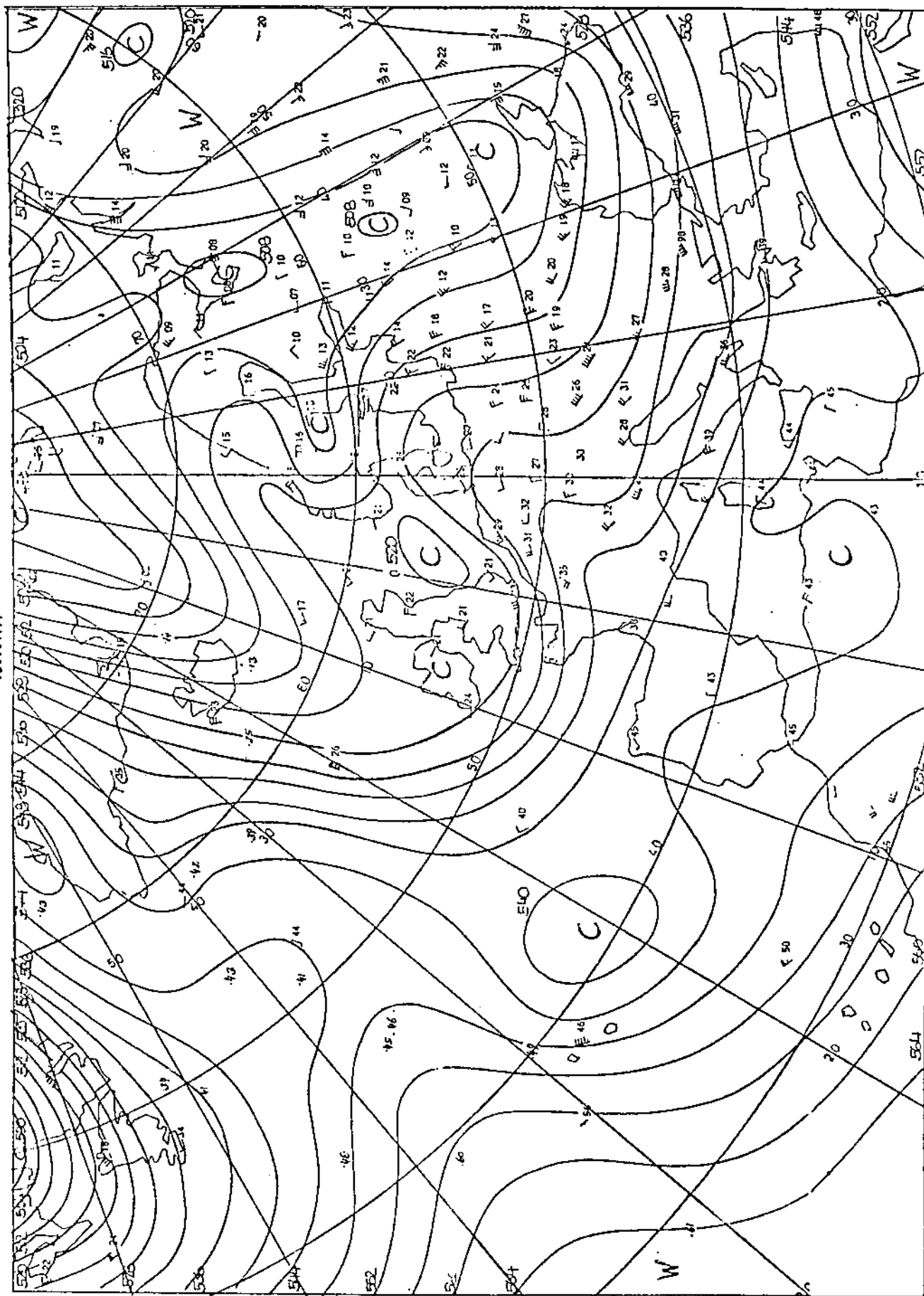
PONTO ITALIA

$$\begin{cases} \Delta \zeta_0 \text{ prevista} \approx 372,9 \times 86'400 \times 10^{-11} = 32,2 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \\ \Delta \zeta_0 \text{ reale} \approx \frac{g}{f} (\nabla_{25}^2 - \nabla_{24}^2) \approx 1,52 \cdot 10^6 (180) = 27,3 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \end{cases}$$

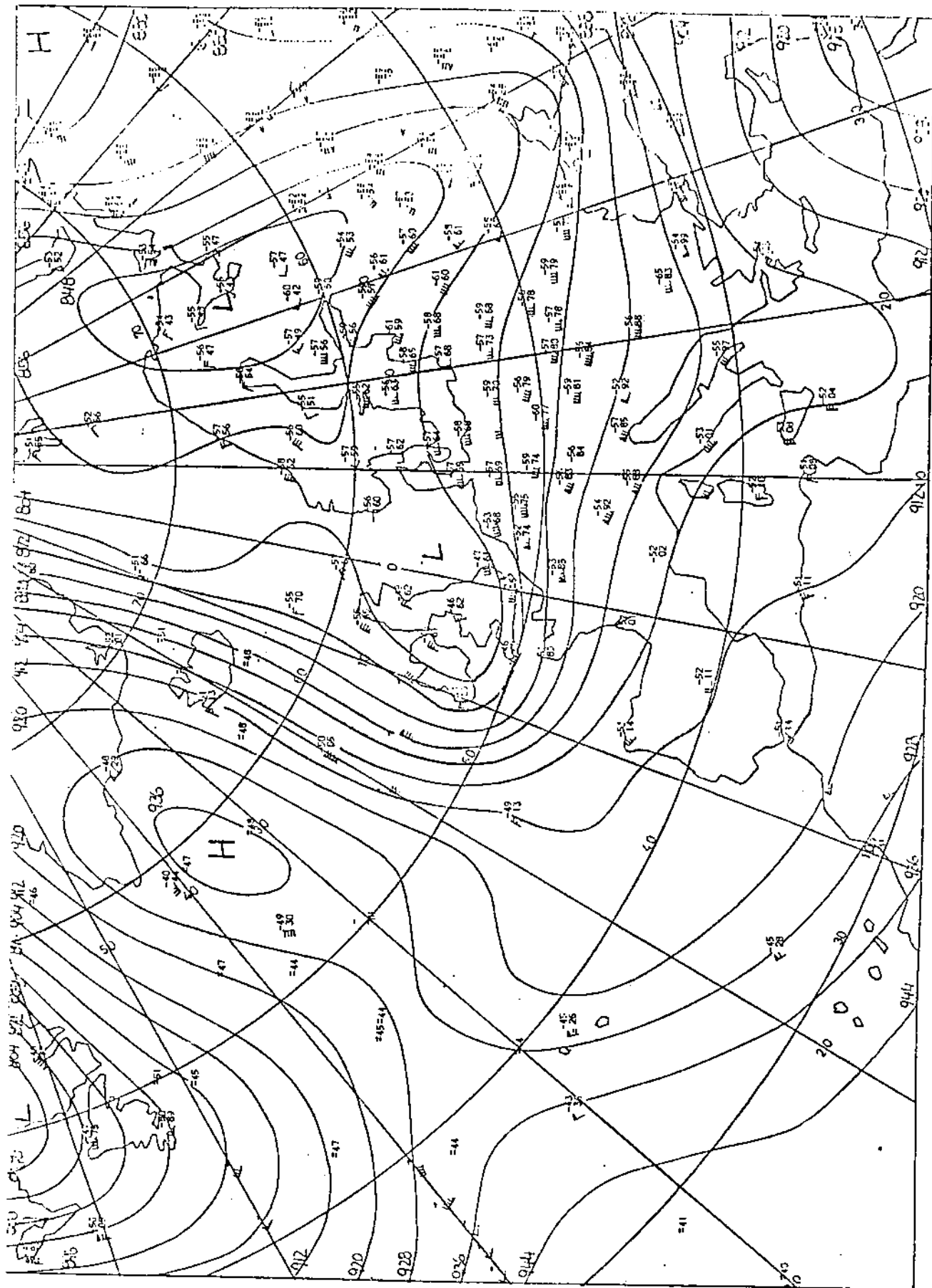


12.5.71

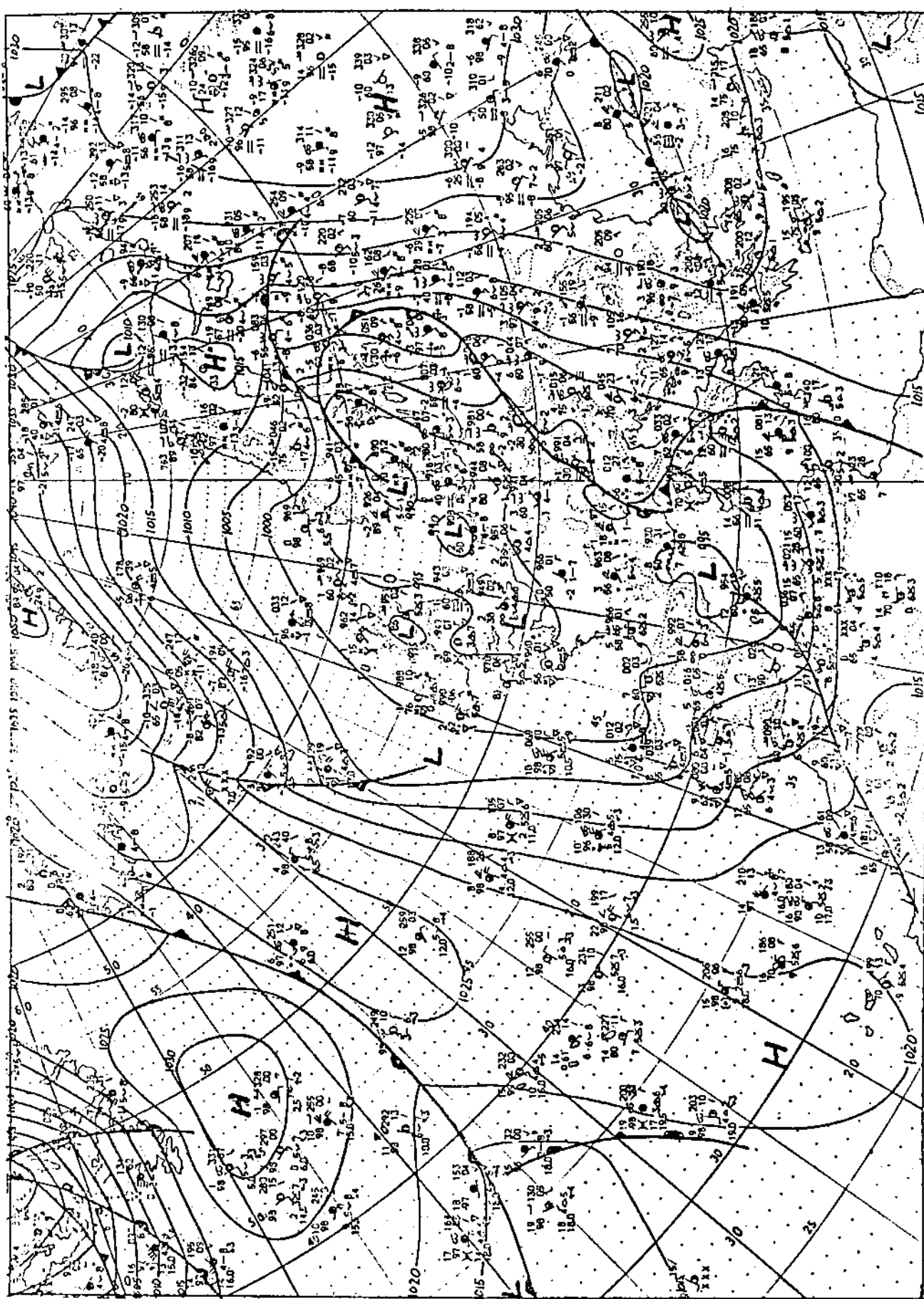
10.1.1977



500/1000 mbars 00 GMT

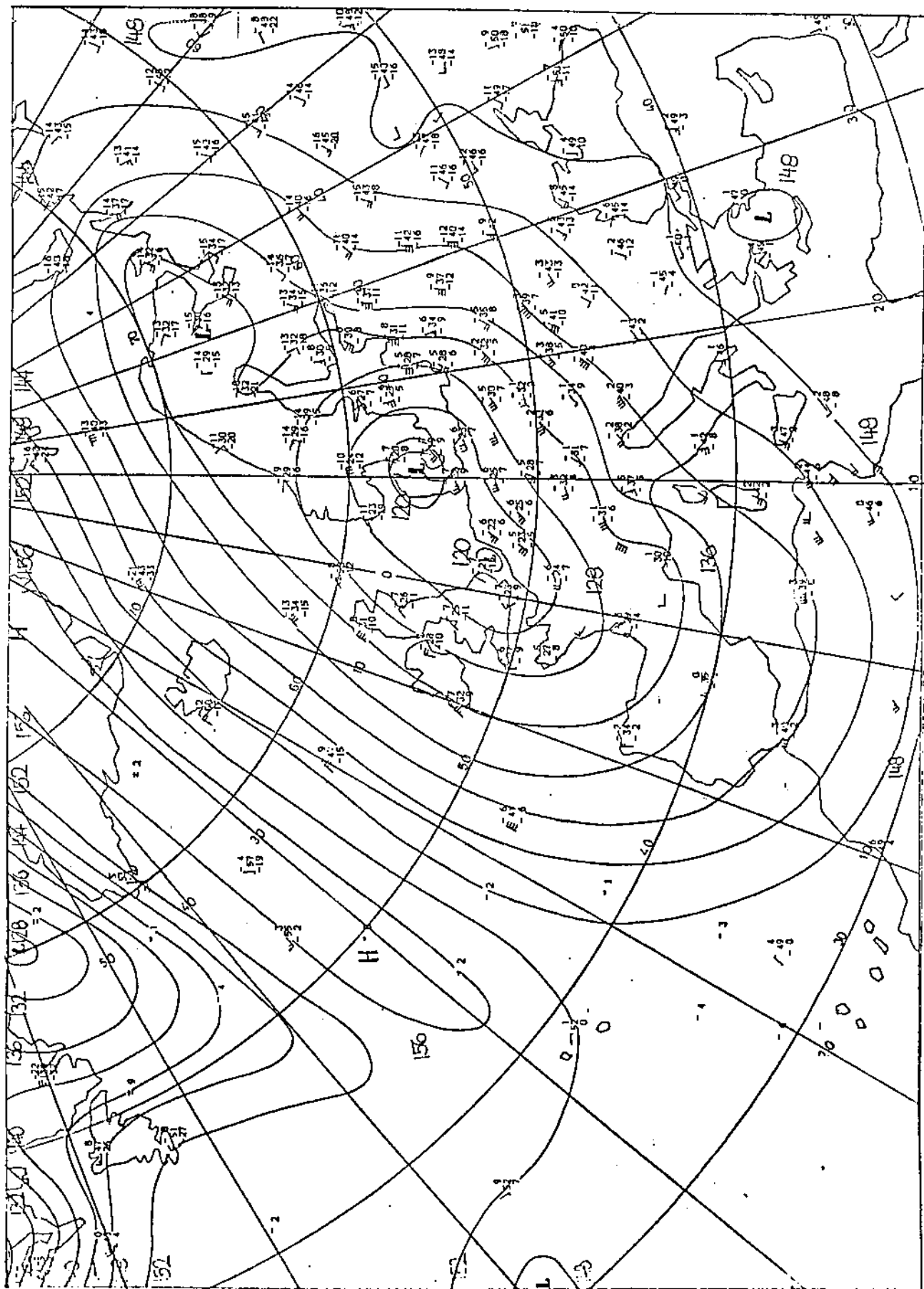


11-1-77

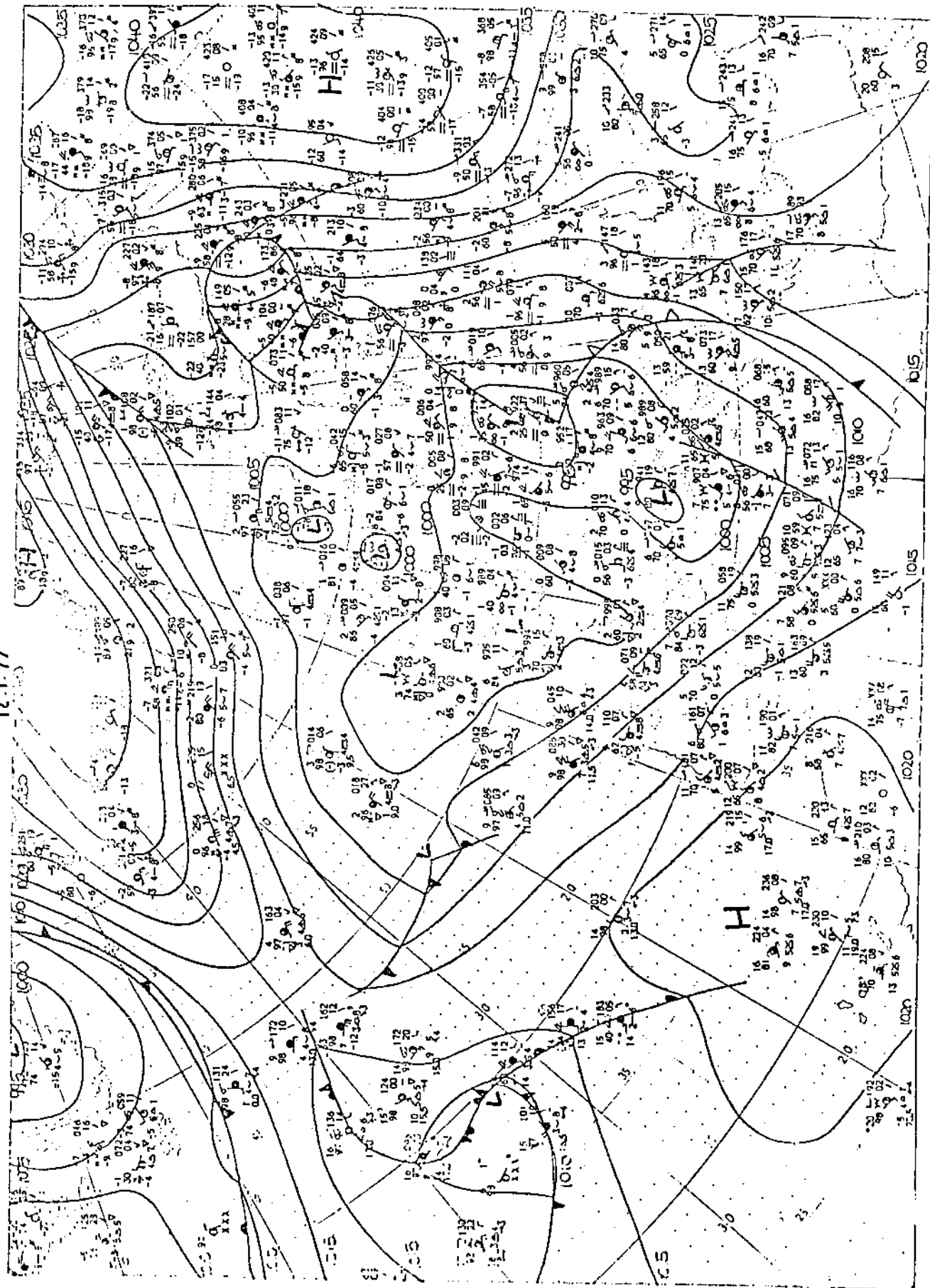


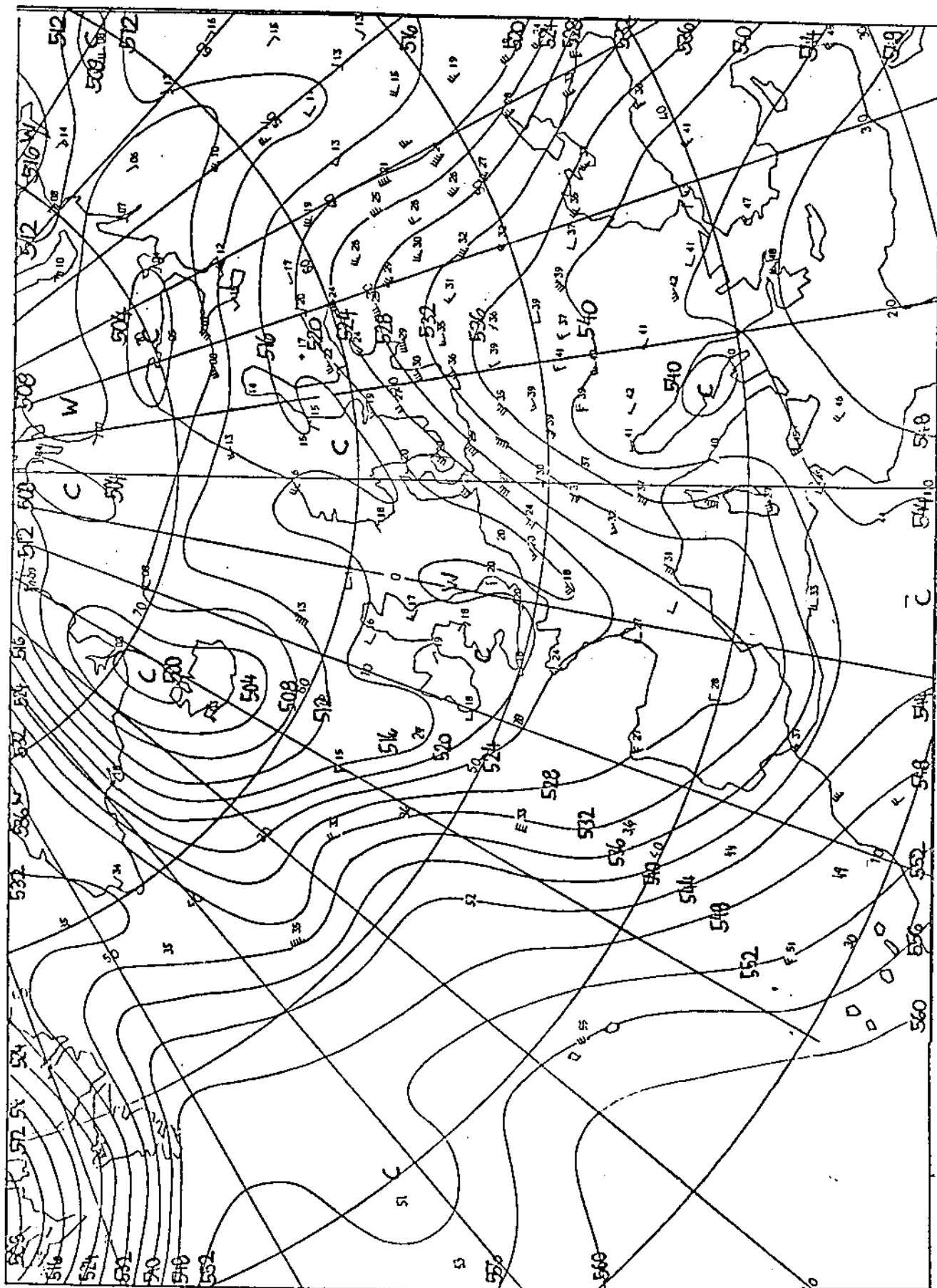
12G MT

11.1.1977

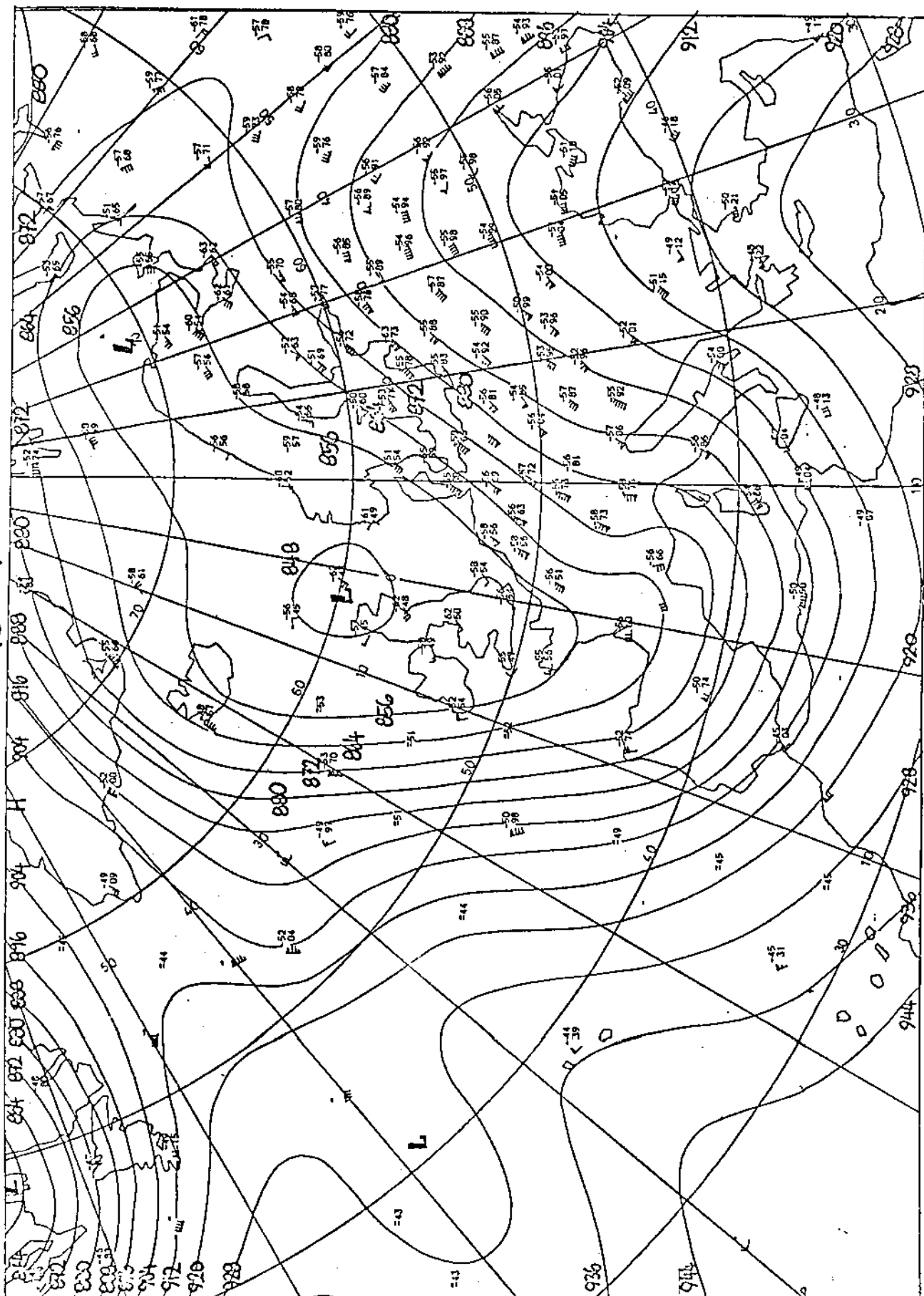


12.1.77



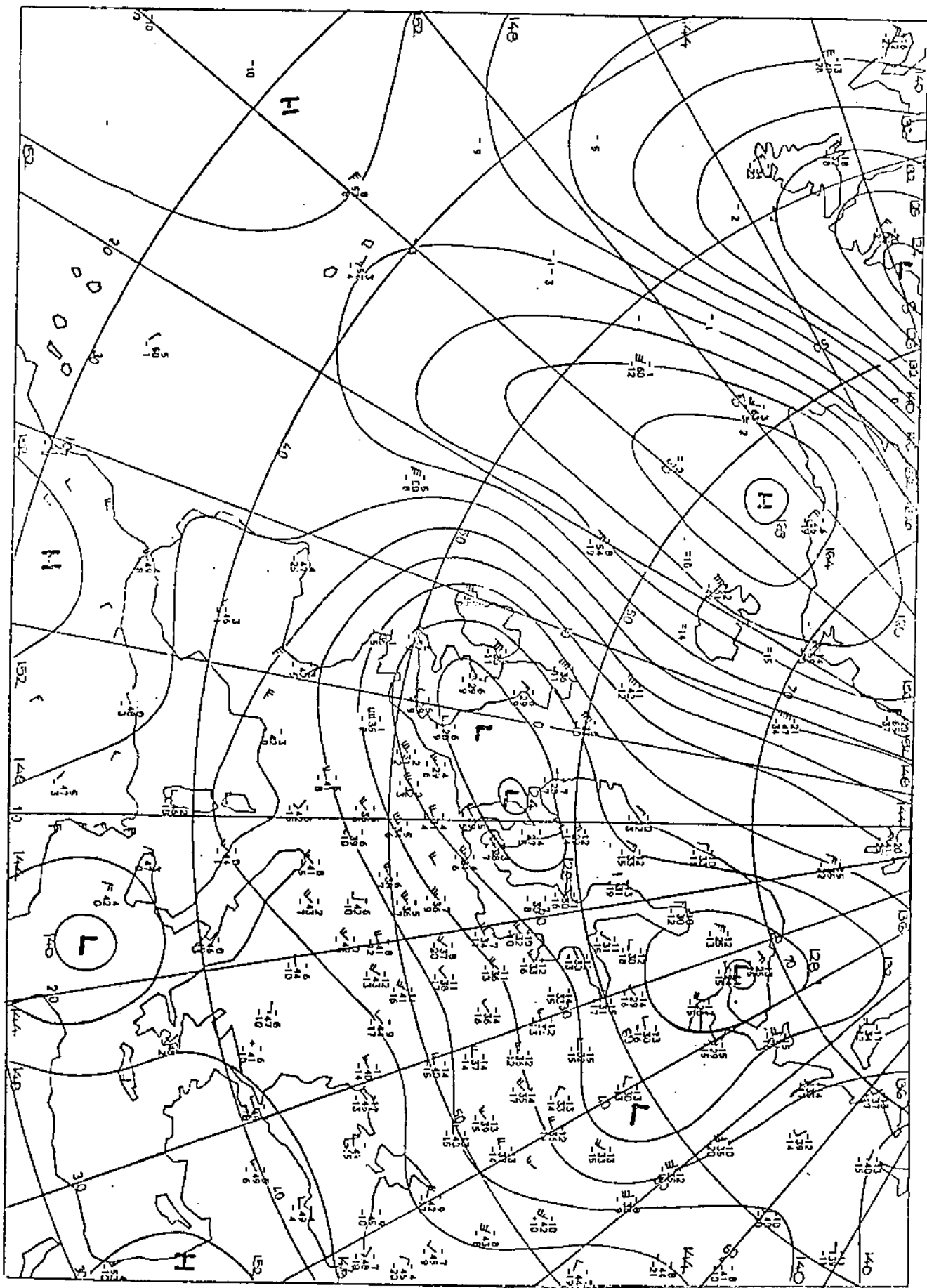


500/1000 mbar 00 GMT



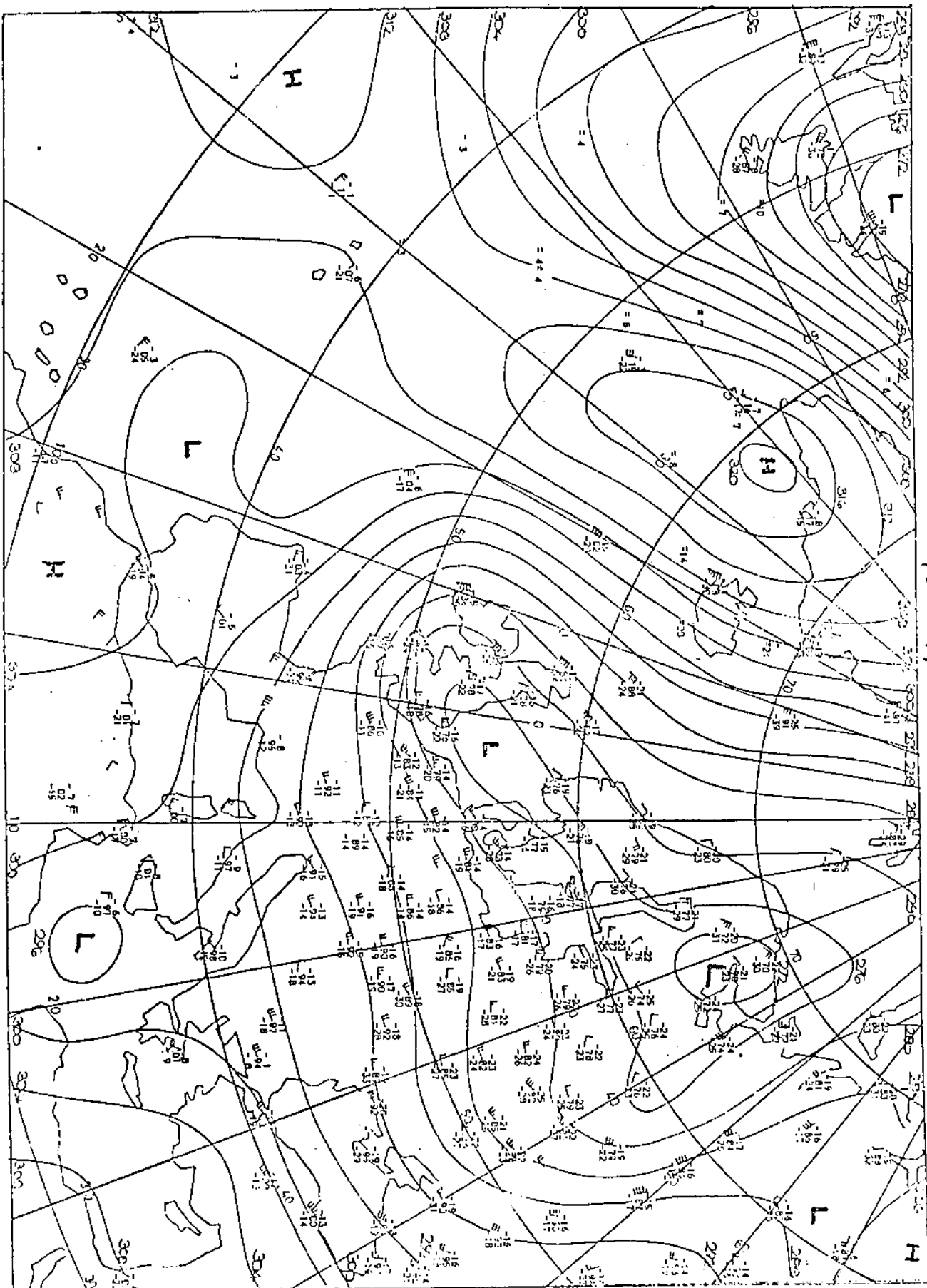
3000 - Low on OACNT

10.1.1977



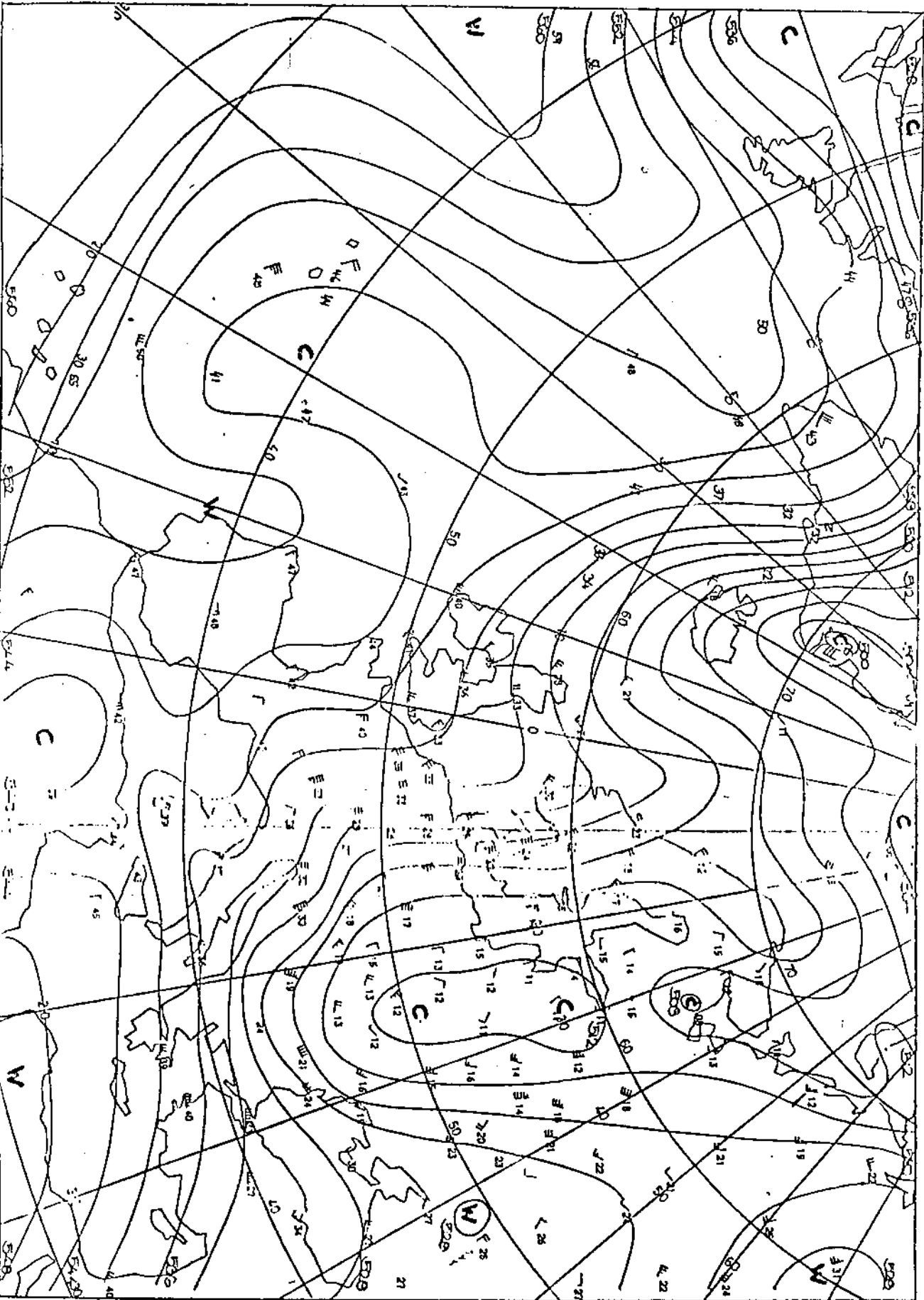
850 mbar 00 GMT

10.1.77

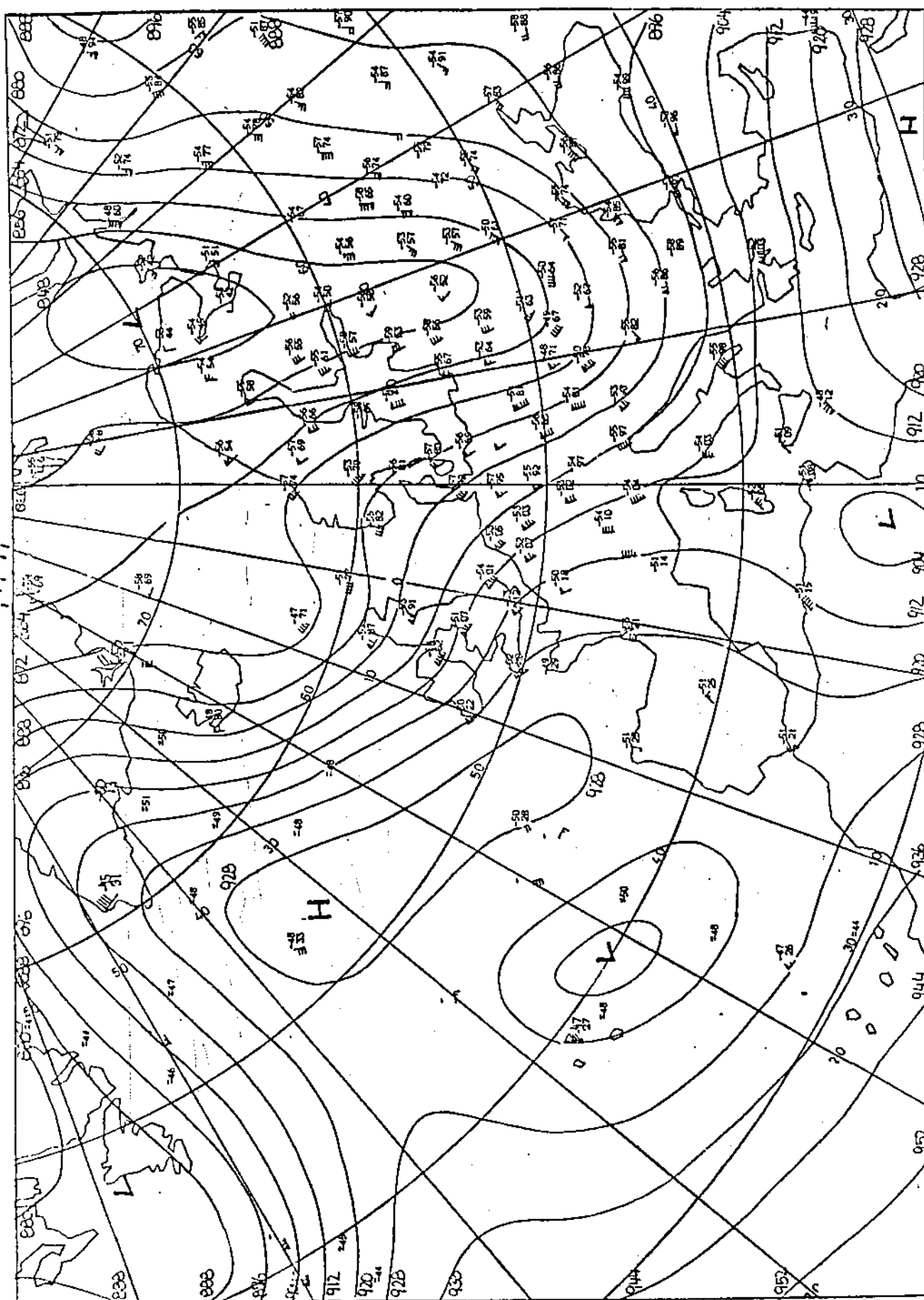


700 mbar 00 GMT

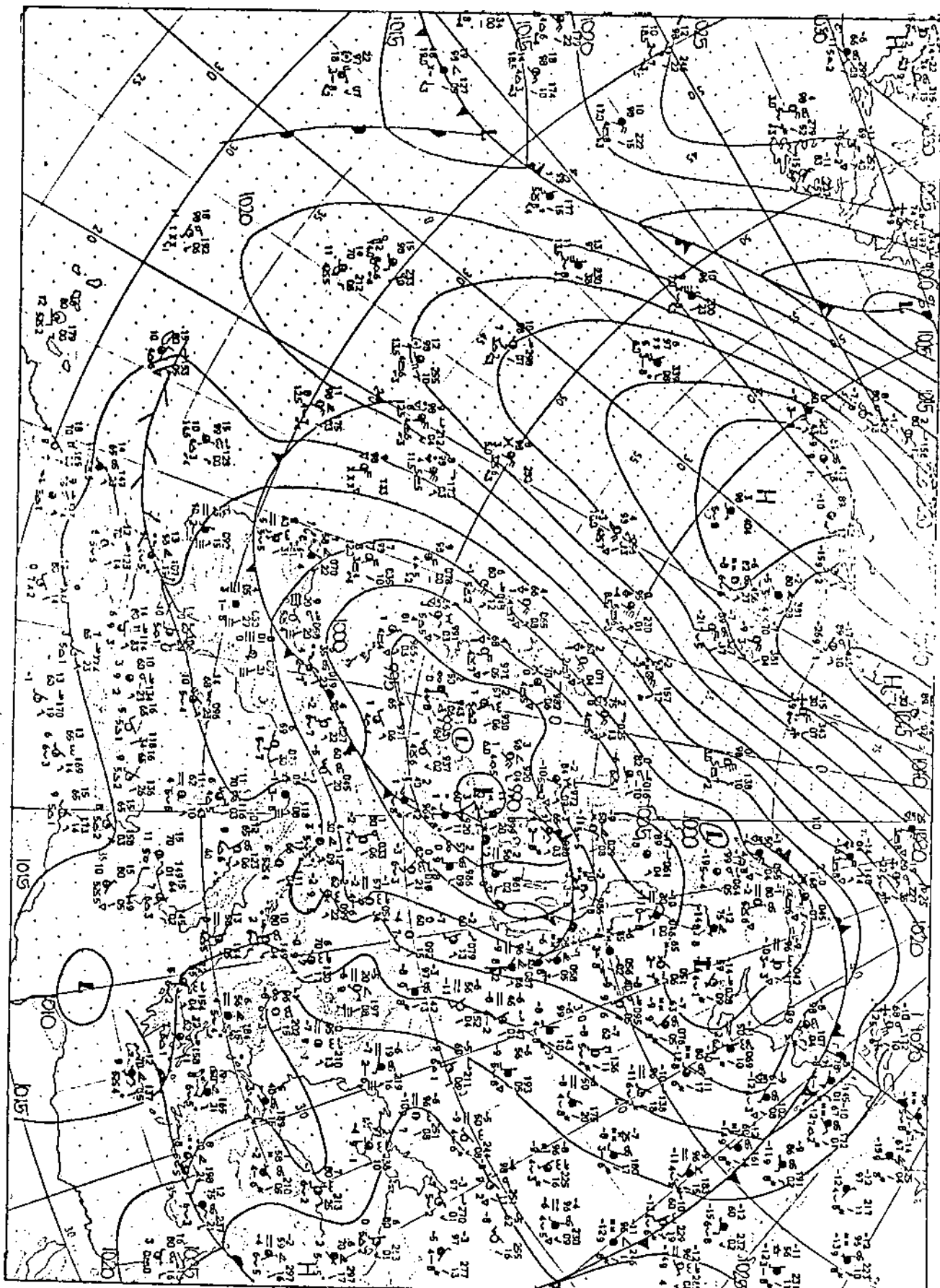
9.1.1977



500/1000 rubber 00 GMT



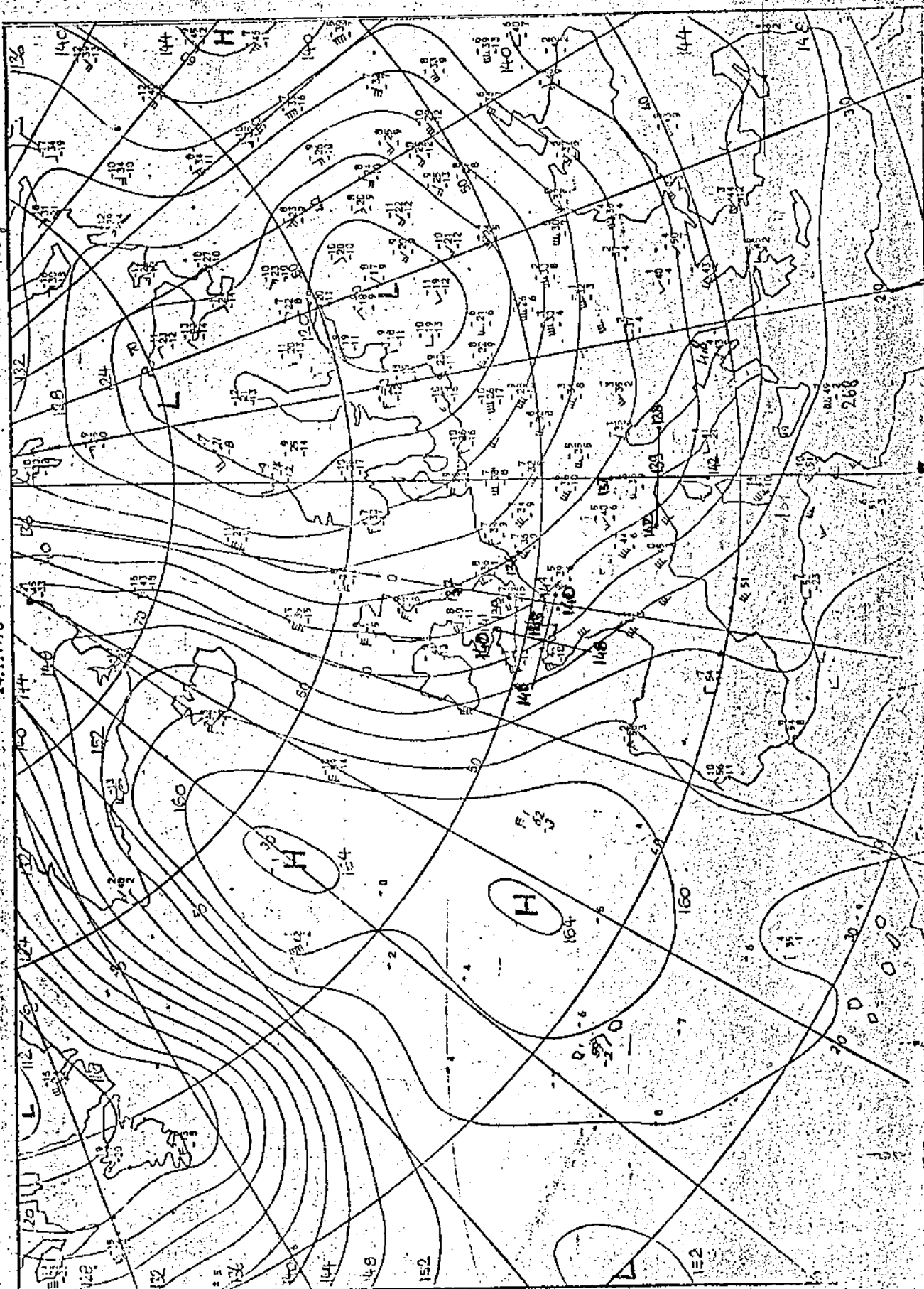
300 mbar 00 GMT



12 GMT

21 August

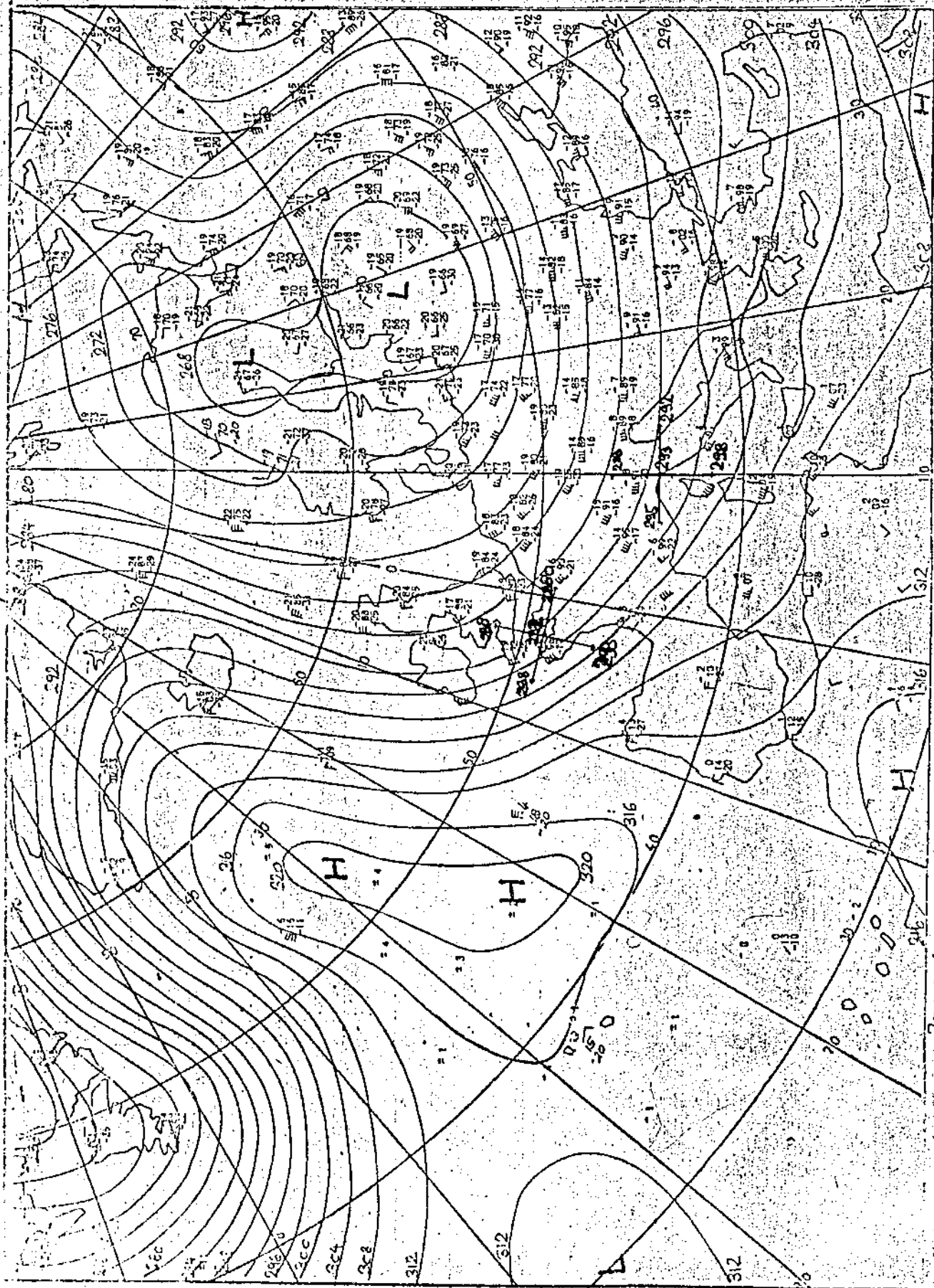
24.1.1976



850 mb
850 mb

349

41



700 mb
700 mb